離散数学 University of Electro-Communications

5. 述語と集合

植野真臣

スケジュール

4月14日：第1回：命題と証明
4月21日：第2回：集合の基礎、全称記号、存在記号
4月28日：第3回：命題論理
5月12日：第4回：述語論理
5月19日：第5回：述語と集合
5月26日：第6回：直積と冪集合
6月2日：第7回：様々な証明法 (1)
6月9日：第8回：様々な証明法 (2)
6月16日：第9回：様々な証明法 （再帰的定義と数学的帰納法）
6月23日：第10回：中間試験
6月30日：第11回：写像（関数）(1)
7月7日：第12回：写像 (関数) (2)
7月14日：第13回：写像と関係：二項関係、関係行列、グラフによる表現
7月21日：第14回：同値関係
7月28日：第15回：順序関係：半順序集合、ハッセ図、全順序集合、上界と下界
8月4日：期末試験（補講があればずれていきます。）

---

1. 本日の目標

1. 述語論理と集合
2. 集合の相等
3. 集合演算の証明
4. 集合のもう一つの内包的記法

---

2. 先週の復習： 述語と集合は等価

述語⇒真理集合　　$P(x) \Leftrightarrow \{x|P(x)\}$

---

2. 先週の復習： 述語と集合は等価

述語⇒真理集合　　$P(x) \Leftrightarrow \{x|P(x)\}$
集合演算⇒述語
$A \cap B$の述語表現？

---

2. 先週の復習： 述語と集合は等価

述語⇒真理集合　　$P(x) \Leftrightarrow \{x|P(x)\}$
集合演算⇒述語
$A \cap B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \land (x \in B)\}$

2. 先週の復習： 述語と集合は等価

述語⇒真理集合　$P(x) \Leftrightarrow \{x|P(x)\}$

集合演算⇒述語

$$A \cap B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \land (x \in B)\}$$

$A \cup B$の述語表現？

2. 先週の復習： 述語と集合は等価

述語⇒真理集合　$P(x) \Leftrightarrow \{x|P(x)\}$

集合演算⇒述語の真理集合

$$A \cap B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \land (x \in B)\}$$
$$A \cup B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \lor (x \in B)\}$$

2. 先週の復習： 述語と集合は等価

述語⇒真理集合　$P(x) \Leftrightarrow \{x|P(x)\}$

集合演算⇒述語の真理集合

$$A \cap B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \land (x \in B)\}$$
$$A \cup B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \lor (x \in B)\}$$

A^Cの述語表現？

2. 先週の復習： 述語と集合は等価

述語⇒真理集合　$P(x) \Leftrightarrow \{x|P(x)\}$

集合演算⇒述語の真理集合

$$A \cap B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \land (x \in B)\}$$
$$A \cup B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \lor (x \in B)\}$$
$$A^C \Leftrightarrow \{x|\neg(x \in A)\}$$

$A \subseteq B$の述語表現？

2. 先週の復習： 述語と集合は等価

述語⇒真理集合　$P(x) \Leftrightarrow \{x|P(x)\}$

集合演算⇒述語の真理集合

$$A \cap B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \land (x \in B)\}$$
$$A \cup B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \lor (x \in B)\}$$
$$A^C \Leftrightarrow \{x|\neg(x \in A)\}$$
$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x[x \in A \longrightarrow x \in B]$$

$A = B$の述語表現？

2. 先週の復習： 述語と集合は等価

述語⇒真理集合　$P(x) \Leftrightarrow \{x|P(x)\}$

集合演算⇒述語の真理集合

$$A \cap B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \land (x \in B)\}$$
$$A \cup B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \lor (x \in B)\}$$
$$A^C \Leftrightarrow \{x|\neg(x \in A)\}$$
$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x[x \in A \longrightarrow x \in B]$$
$$A = B \Leftrightarrow \forall x[x \in A \longleftrightarrow x \in B]$$

2. 先週の復習： 述語と集合は等価

例題1

普遍集合Uに対し，$\forall B[\emptyset \subseteq B]$ を証明せよ。

2. 先週の復習： 述語と集合は等価

例題1

普遍集合Uに対し，$\forall B[\emptyset \subseteq B]$を証明せよ。

[証明]定義に戻れ：$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x[x \in A \longrightarrow x \in B]$

$\forall x \forall B[x \in \emptyset \longrightarrow x \in B]$: 空ならば真が示せればよい。$\forall x \forall B[x \in \emptyset \longrightarrow x \in B] \Leftrightarrow$

$\forall x \forall B(x \in [\emptyset^C \cup \mathrm{B}]) \Leftrightarrow \forall x \forall B(x \in [U \cup \mathrm{B}]) \Leftrightarrow$
$\forall x(x \in U)$ は常に真。したがって

普遍集合Uに対し，$\forall B[\emptyset \subseteq B]$ ■

2. 先週の復習： 述語と集合は等価

例題2　以下を述語論理を用いて証明せよ。

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

2. 先週の復習： 述語と集合は等価

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

[証明]

$A - (B \cup C) \Leftrightarrow \{x|x \in A\} \wedge \{x|x \notin (B \cup C)\} \Leftrightarrow$
$\{x|x \in A\} \wedge \{x|x \in (B^c \cap C^c)\} \Leftrightarrow$

$\{x|x \in A\} \wedge [\{x|x \notin B \wedge x \notin C\}] \Leftrightarrow [\{x|x \in A\} \wedge \{x|x \notin B\}] \wedge \{x|x \in A \wedge x \notin C\} \Leftrightarrow \{x|x \in (A - B)\} \wedge \{x|x \in (A - C)\}$
$\Leftrightarrow \{x|x \in (A - B) \cap (A - C)\}$
$\Leftrightarrow (A - B) \cap (A - C)$

■

2. 先週の復習： 述語と集合は等価

例題3

分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$を命題論理を用いて証明せよ。

2. 先週の復習： 述語と集合は等価

例題　３

集合演算分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ を命題論理を用いて証明せよ。

[証明]

$A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in (B \cap C))$
$\Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B \wedge x \in C)$

命題演算の分配律を用いると

$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$
$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C)$
$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

なぜ、命題論理の分配律を用いてよいのか？

$$(x \in A) \lor (x \in B \land x \in C)$$
$$\Leftrightarrow (x \in A \lor x \in B) \land (x \in A \lor x \in C)$$

この分配律命題は真理値表で証明できるので
集合の分配律の既定をなすものである。

3. 集合の記法

再掲（2章の3. 集合の「要素」の記法）

外延的記法：$A = \{1,2,3,4,5\} = \{3,2,5,1,4\}$ （有限集合）

$A = \{1,3,5,7 \cdots\}$ （無限集合）

内包的記法：$A = \{n | n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5\}$

$A = \{n | n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5, n\text{は奇数}\}$

これまで習ってきた内包的記法と述語

これまで習ってきた内包的記法は

$$A = \{x | P(x)\}$$

述語の真理集合

問題

$$A = \{n | n \in \mathbb{N}, n\text{は奇数}\}$$

の「nは奇数」を数式で表したい。
どのように表せるか？

問題

$$A = \{n | n \in \mathbb{N}, n\text{は奇数}\}$$

の「nは奇数」を数式で表したい。
どのように表せるか？

ヒント　述語での記述では

$$A = \{n | n\text{の条件}1, n\text{の条件}2, \cdots\}$$

ここで　nの条件は「論理積、かつ」「$\land$」の場合，「,」で連ねる。

$$A = \{n | n\text{の条件}1\} \cap \{n | n\text{の条件}2\} \cap \cdots$$

問題

$$A = \{n | n \in \mathbb{N}, n\text{は奇数}\}$$

の「nは奇数」を数式で表したい。
どのように表せるか？

$$A = \{n | n = 2k, k \in \mathbb{N}\}$$

問題

$$A=\{n \mid n\in\mathbb{N}, n\text{は奇数}\}$$

の「nは奇数」を数式で表したい。
どのように表せるか？

$$A=\{n \mid n=2k, k\in\mathbb{N}\}$$

kの意味があいまい

問題

$$A=\{n \mid n\in\mathbb{N}, n\text{は奇数}\}$$

の「nは奇数」を数式で表したい。
どのように表せるか？

$$A=\{n \mid n\in\mathbb{N}, n \bmod 2=1\}$$

問題

$$A=\{n \mid n\in\mathbb{N}, n\text{は奇数}\}$$

の「nは奇数」を数式で表したい。
どのように表せるか？

$$A=\{n \mid n\in\mathbb{N}, n \bmod 2=1\}$$

もう一つの内包的記法

$$\{F(t) \mid t\in\mathbf{U}\}$$

「$\mathbf{U}$のひとつひとつの要素tについて，$F(t)$で表される要素を考え，それらをすべて集めてできる集合」

もう一つの内包的記法

$$\{F(t) \mid t\in\mathbf{U}\}$$

「$\mathbf{U}$のひとつひとつの要素tについて，$F(t)$で表される要素を考え，それらをすべて集めてできる集合」

例 $\{2n+1 \mid n\in\mathbb{N}\}$

「$\mathbb{N}$のひとつひとつの要素nについて，$2n+1$で表される要素を考え，それらをすべて集めてできる集合」

$\Rightarrow$ 「正の奇数集合」

もう一つの内包的記法と述語

集合と述語は等価である。
では，
$E=\{2n+1 \mid n\in\mathbb{N}\}$を$x$と$n$のみの述語で表現せよ。

もうひとつの内包的記法と述語

集合と述語は等価である。

では,

$E = \{2n + 1 | n \in \mathbb{N}\}$を$x$と$n$のみの述語表現による内包的記法（先週まで習ってきた記法）で表現せよ。

$$E = \{x | P(x)\}$$

xの条件をどのようにnで表現するか？

もうひとつの内包的記法と述語

集合と述語は等価である。

では,

$E = \{2n + 1 | n \in \mathbb{N}\}$を$x$と$n$のみの述語表現による内包的記法（先週まで習ってきた記法）で表現せよ。

$$E = \{x | n \in \mathbb{N}(x = 2n + 1)\}$$

もうひとつの内包的記法と述語

集合と述語は等価である。

では,

$E = \{2n + 1 | n \in \mathbb{N}\}$を$x$と$n$のみの述語表現による内包的記法（先週まで習ってきた記法）で表現せよ。

$$E = \{x | n \in \mathbb{N}(x = 2n + 1)\}$$

もうひとつの内包的記法と述語

集合と述語は等価である。

では,

$E = \{2n + 1 | n \in \mathbb{N}\}$を$x$と$n$のみの述語表現による内包的記法（先週まで習ってきた記法）で表現せよ。

$$E = \{x | \forall n \in \mathbb{N}(x = 2n + 1)\}$$

もうひとつの内包的記法と述語

集合と述語は等価である。

では,

$E = \{2n + 1 | n \in \mathbb{N}\}$を$x$と$n$のみの述語表現による内包的記法（先週まで習ってきた記法）で表現せよ。

$$E = \{x | \forall n \in \mathbb{N}(x = 2n + 1)\}$$

なぜ∀でないのか？

$$E = \{x | \forall n \in \mathbb{N}(x = 2n + 1)\}$$

意味：(述語（条件）：xはすべての自然数nについて$x = 2n + 1$)を満たす

$\rightarrow \quad \emptyset$

内包的記述での

$\{x | \forall n(P(x))\}$は　すべてのnについて条件$P(x)$を満たす共通集合$\cap_n \{x | P(x)\}$という意味

もうひとつの内包的記法と述語

集合と述語は等価である。
では,
$E = \{2n+1 | n \in \mathbb{N}\}$を$x$と$n$のみの述語表現による内包的記法(先週まで習ってきた記法)で表現せよ。

$$E = \{x | \exists n \in \mathbb{N}(x = 2n+1)\}$$

各nごとにxが既定される

意味:(条件:ある一つの自然数nについて$x = 2n+1$)を満たすxを集めた集合
述語では、存在記号∃が補われている。

離散数学 University of Electro-Communications

もうひとつの内包的記法と述語の変換

$$\{F(t) | t \in U\}$$

⇒

$$\{x | \exists t \in U(x = F(t))\}$$

注)存在量化子∃が隠されている。

内包的記述での
$\{x | \exists n(P(x))\}$は すべてのnについて条件(述語) $P(x)$を満たす和集合$\bigcup_n \{x | P(x)\}$という意味

離散数学 University of Electro-Communications

二つの内包的記述の違い

$\{F(t) | t \in U\}$は$F(t) = 2t+1$など演算になっている場合に便利。しかし、tと$F(t)$が同じ普遍集合でない場合は使えない場合もある。

内包型:集合$F(t) = 2t+1$のような演算の記述が存在量化子や他の変数を導入しなければならず面倒。演算がなく、条件が複数の場合は便利。

$$\{x \in \mathbb{R} | -2 \le x < 3, -1 \le x < 4\}$$

というように集合が実数集合であるなどを規定することができる。

離散数学 University of Electro-Communications

例題1

0以上の偶数集合を二つの内包的記法で示せ。

離散数学 University of Electro-Communications

例題1

0以上の偶数集合を二つの内包的記法で示せ。

$A = \{2n | n \in \mathbb{N}\}$

$A = \{x | \exists n \in \mathbb{N}(x = 2n)\}$

離散数学 University of Electro-Communications

注意

述語では,普遍集合を前に出してよい。

$$\{x \in \mathbb{N} | x \bmod 2 = 0\}$$

利点:自然数の集合であることがすぐにわかる。

$\{2n | n \in \mathbb{N}\}$ は自然数の部分集合だとわかる。
しかし $\{\sqrt{n} | n \in \mathbb{N}\}$ は何の集合かがわからないので意味をなさない。

例題2

$$\mathbf{D} = \{x | x \in \mathbb{R}, -2 \leq x < 3\}$$

内包的記法　$B = \{r^2 + 2r + 1 | r \in \mathbf{D}\}$

は簡単な述語による内包的記述に変換できる。それを求めよ。

例題2

$$\mathbf{D} = \{x | x \in \mathbb{R}, -2 \leq x < 3\}$$

$$B = \{r^2 + 2r + 1 | r \in \mathbf{D}\}$$

は簡単な述語による内包的記述に変換できる。それを求めよ。

[正答]

述語（内包的記法）

$$B = \{x | x \in \mathbb{R}, 0 \leq x < 16\}$$

4. まとめ

1. 述語論理と集合
2. 集合の相等
3. 集合演算の証明
4. 集合のもう一つの内包的記法

演習問題

問題1

以下の集合演算を命題論理を用いて証明せよ。

(1) $A \cup A = A$

(2) $A \cup B = B \cup A$

(3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

(4) $A \subseteq (A \cup B)$

(5) $A, B \subseteq C \rightarrow (A \cup B) \subseteq C$

(6) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(7) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

問題2

$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$を証明せよ。

問題3 以下の記法を述語による内包的記法に書き変えよ。

(1) $A = \{2n^2 - 1 | n \in \mathbb{N}\}$

(2) $\mathbf{D} = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x < 3\}$

$B = \{2r^2 + 3 | r \in \mathbf{D}\}$