1. 命題と証明

植野真臣

サイエンスを学校で学ぶ理由

学校でサイエンスを学ぶ主な理由は、サイエンスの知識を学ぶことではない。

科学的方法を学ぶことである。

正しい世の中をつくるために、真摯な科学者の態度や真実を探求するモチベーション、事実から真実を見つけ出す方法、正しいことを正しいといえる勇気、たとえ他のすべての人が間違えていても、正しいことを証明して説得できる力、論理能力とだまされない能力、など

離散数学とは

海外では、コンピュータサイエンスのための数学。

【離散】りさん
1.1.
《名・ス自》
ちりぢりになること。
「一家離散」
2.2.
数学
《名》
本来的にとびとびの値を取ること。
「離散的」

離散数学（りさんすうがく、英語：discrete mathematics）とは、原則として離散的な（言い換えると連続でない、とびとびの）対象をあつかう数学のことである。

本授業「離散数学」の大局的目標

リテラシーをつけること

だまされない能力

誤った論理を見破ったり、うその証明などを見抜ける能力

コンピュータサイエンスにおける基礎を身に付けること。さらにはコンピュータサイエンス分野では、証明なしで用いられる手法がある。しかし、それは非常に危険であり、限界があることを理解してほしい。

具体的目標

1 数学における基本的な用語 (集合，論理，写像，関係) を 正しく使うことができる

2 数学における基本的な証明を正しく行うことができる

3.不完全な証明を指摘することができる

本授業の進め方

講義
- スライドと板書で進める
- スライドのコピーに重要事項のメモを取る
- 演習問題に取り組む
- 不明な点は教員とティーチング・アシスタントに質問する。できなかった部分は家でやってみてください。宿題ではないですが、もし、気になる人は次の授業で提出してください。添削して返します。成績には関係しません。
- 演習問題の類題もHPに置いておきますので勉強したい人はやってください。これもフィードバックがほしい人は次の週に提出ください。

成績　2回のテスト

退室
- オフィスアワー：授業終了後　質問など

本授業の構成

4月14日：第1回：命題と証明
4月21日：第2回：集合の基礎、全称記号、存在記号
4月28日：第3回：命題論理
5月12日：第4回：述語論理
5月19日：第5回：述語と集合
5月26日：第6回：直積と冪集合
6月2日：第7回：様々な証明法 (1)
6月9日：第8回：様々な証明法 (2)
6月16日：第9回：様々な証明法 （再帰的定義と数学的帰納法）
6月23日：第10回：中間試験
6月30日：第11回：写像（関数）(1)
7月7日：第12回：写像 (関数) (2)
7月14日：第13回：写像と関係：二項関係、関係行列、グラフによる表現
7月21日：第14回：同値関係
7月28日：第15回：順序関係：半順序集合、ハッセ図、全順序集合、上界と下界
8月4日：期末試験（補講があればずれていきます。）

教科書：なし. 講義資料を毎回用意する

参考書:

論理と集合から始める数学の基礎、嘉田　勝、日本評論社、(前半はこれを教科書として証明法を学ぶ)

はじめての離散数学, 小倉久和、近代科学社

離散数学への招待 :J.マトウシェク/J.ネシェトリル　丸善出版

やさしく学べる離散数学:石村園子 共立出版株式会社

コンピュータサイエンスのための離散数学:守屋悦朗 サイエンス社

本日の目標

1. 本授業のねらい
2. 離散数学とは何か？
3. 証明とは何か？
4. 命題とは何か？
5. 公理とは何か？

1. 証明とは？

「証明」は、真理(Truth)を立証するための手法である。

証明の方法は分野によって異なる。

- 法的真理は、法廷で示される証拠と法律、陪審員、裁判官によって決定される。
- 科学的真理は、実験によって確認される。
- 哲学的真理は、厳密な論証の積み重ねによって導かれる。
- 宗教的真理は、歴史的な宗教のコミュニティにより決定される。
- 組織的真理は、権威により決定づけられる。

数学での証明の定義

Def
「証明」とは　基礎的公理(Axiom)集合から命題(Proposition)を導く論理的推論（Logical Deduction)の連鎖である。

←ー
The Smartest Proof（最も　賢い証明）

注意)
Def = Definition, 定義のこと

三平方の定理

よく知ってます！！

$a^2 + b^2 = c^2$

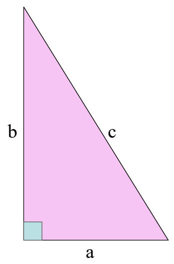


図1.

証明（wikipedia）

図1の三角形を図2のように4つ並べる。外側に一辺が $a+b$ の正方形（以下「大正方形」）が、内側に一辺が c の正方形（以下「小正方形」）ができる。
（大正方形の面積）=（小正方形の面積）+（直角三角形の面積）× 4
大正方形の面積は $(a+b)^2$, 小正方形の面積は c^2, 直角三角形4個の面積の合計は　ab/2 ×4=2ab
これらを代入すると$(a+b)^2=c^2+2ab$
従って、$a^2+b^2=c^2$

■

注）■　は証明の完了を示す

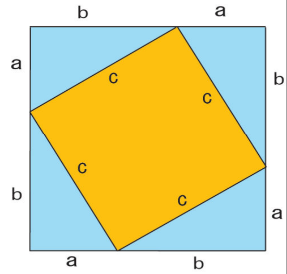
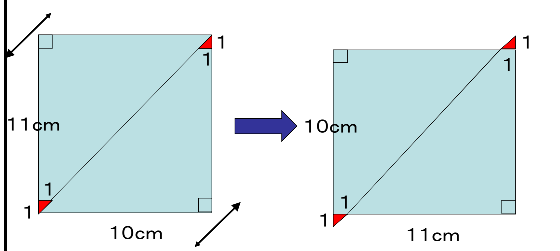


図2

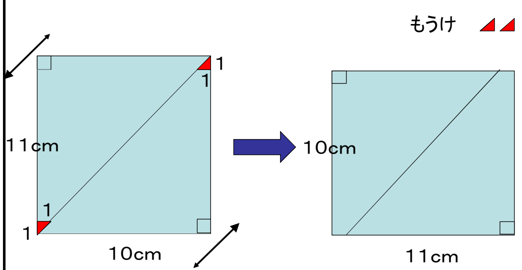
三平方の定理

最もよく知られている証明の一つ。
これ以外にも100種以上の証明が知られている。

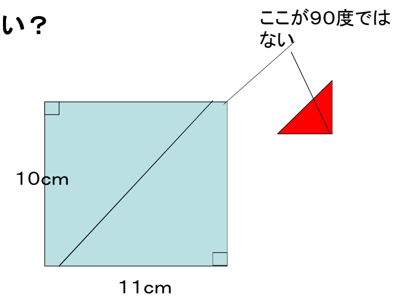
怪しげな命題： 紙を無限に生成しつづける方法



怪しげな命題： 紙を無限に生成しつづける方法



どこが間違い？



1＝－1 ？

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)} = (\sqrt{-1})^2$$
$$= -1$$

■

Bertrand Russell (1872 - 1970)

再掲 ：証明の定義

Def

「証明」とは 基礎的公理(Axiom)集合から命題(Proposition)を導く論理的推論（Logical Deduction)の連鎖である。

←ー

The Smartest Proof（最も 賢い証明）

2. 命題(Proposition)

Def

命題（Proposition)とは、真か偽か判断できる記述

次の記述は命題か？

- 1 + 1 = 2
- 2 + 3 = 6
- 調布市は東京ではない
- 和田アキ子は男である
- ビートルズはすごい！！
- びっくりした―！！
- このレストランのステーキはおいしい！！
- 犬は動物である
- $x^2 - 1 = 0$

再掲 ：証明の定義

Def

「証明」とは 基礎的公理(Axiom)集合から命題(proposition)を導く論理的推論（Logical Deduction)の連鎖である。

3. 公理

Def 公理とは証明された真の命題のこと

公理の種類

1. 定理 (Theorem) 非常に重要な命題
2. 補題(Lemma) 重要な命題を証明するために必要な公理の証明
3. 系(corollary) すでに証明されている定理から容易に証明できる命題

4. 高校での証明と大学での証明

次の命題は偽であることを証明せよ。
「すべての実数xについて$x^2 - 5x + 6 \geq 0$」
嘉田勝 （数学セミナー2009 年5 月号）

高校での解答

$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$だから，$2 < x < 3$ のとき，$x^2 - 5x + 6 < 0$が成り立つ．したがって，
「すべての実数xについて$x^2 - 5x + 6 \geq 0$」
は偽である．

■

大学では　間違い

「すべての実数について　～が成り立つ」
の否定の証明はどのようにすればよいか？

大学では　間違い

「すべての実数について　～が成り立つ」
の否定の証明はどのようにすればよいか？

「ある実数xについて～が成り立たない」ことを示せばよい．

ロジカル！！

大学での証明

$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$だから，$2 < x < 3$ のとき，$x^2 - 5x + 6 < 0$が成り立つ．このとき，実数$\frac{5}{2}$はxについての条件$2 < x < 3$を満たす．よって，$x^2 - 5x + 6 \geq 0$ を満たさない実数$\frac{5}{2}$が存在する．
したがって，「すべての実数xについて$x^2 - 5x + 6 \geq 0$」
は偽である．

■

高校生と大学生の差

- 高校生は計算結果をずらずら書けば点数がもらえる。
- 大学生は、本当に命題を証明しないと正解にならない。
- 高校生は自分の思考の順に証明をずらずら書く。
- 大学生は説得するための順序をまず考える。

高校や大学入試での数学で覚えた「自分が考えた過程を書く」という方法を改めて，「読み手を説得するために書く」という姿勢に転換することが重要　嘉田勝 （数学セミナー2009 年5 月号）

4. 本日のまとめ

1. 本授業のねらい
2. 離散数学とは何か？
3. 証明の定義
4. 命題の定義
5. 公理

演習問題

問題1 以下の証明はどこがおかしいか？

(a)

1/8 > ¼

証明

$$3>2$$
$$3 \log_{10}(1/2) > 2 \log_{10}(1/2)$$
$$\log_{10}(1/2)^3 > \log_{10}(1/2)^2$$
$$(1/2)^3 > (1/2)^2$$
$$1/8 > 1/4$$

■

問題1 以下の証明はどこがおかしいか？

(b) 100￠=1$である。しかし、以下が成り立つ。

1￠ =$1

証明

1￠ = $0.01 = ($0.1)^2 = (10￠)^2= 100 ￠ =$1

■

問題1 以下の証明はどこがおかしいか？

(c) aとbは二つの等しい実数である。そうであれば a=0である。

証明

$$a = b$$
$$a^2 = ab$$
$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$
$$(a-b)(a+b) = (a-b)b$$
$$a + b = b$$
$$a = 0$$

■

問題2

算術平均と幾何平均の間には任意の$a, b \geq 0$について以下の性質がある。

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

問題2 先の命題について以下の証明ができる。しかし、この証明は完璧ではない。問題を見つけてどのようにすればよいかを考えよ。

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ が成り立つと仮定する。

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$ より

$a^2+2ab+b^2 \geq 4ab$ より

$a^2-2ab+b^2 \geq 0$ より

$(a-b)^2 \geq 0$ は真である。従って命題は真である.

■

問題3. 三囚人問題

ある監獄にアラン，バーナード，チャールズという3 人の囚人がいて，それぞれ独房に入れられている．3 人は近く処刑される予定になっていたが，恩赦が出て3 人のうち1人だけ釈放されることになったという．誰が恩赦になるかは明かされておらず，それぞれの囚人が「私は釈放されるのか?」と聞いても看守は答えない．囚人アランは一計を案じ，看守に向かって「私以外の2 人のうち少なくとも1 人は死刑になるはずだ．その者の名前が知りたい．私のことじゃないんだから教えてくれてもよいだろう?」と頼んだ.すると看守は「バーナードは死刑になる」と教えてくれた．それを聞いたアランは「これで釈放される確率が1/3 から1/2に上がった」とひそかに喜んだ．果たしてアランが喜んだのは正しいのか?

問題4 次のうち命題はどれか？

(1)坂本龍馬は土佐の人であった。

(2)地球外の天体に生命が存在するかもしれない。

(3) $f(x)=x^2+x-2$とすると$f(2)=0$

(4)アインシュタインはかしこい。

(5) $n \geq 3$の整数のとき， $a^n+b^n=c^n$を満たす実数(a,b,c)は存在しない。

(6) $100000 \neq 100001$

(7) $100000 \fallingdotseq 100001$