離散数学第 12 回演習問題類題（暫定版）

2016 年 7 月 14 日

1

$f{:}X \to Y$ と $g{:}Y \to Z$ が関数とすると，以下が成り立つことを証明せよ．

(1) f と g が 1 対 1 の関数ならば，$g \circ f$ も 1 対 1 の関数である．

(2) f と g が上への関数ならば，$g \circ f$ も上への関数である．

(3) f，g が 1 対 1 対応ならば，$g \circ f$ も 1 対 1 対応である．

(4) 任意の関数 $f : X \to Y$ に対して，集合 Z と $f = h \circ g$ となる 1 対 1 の関数となる $h{:}Z \hookrightarrow Y$，および，上への関数 $g{:}X \to Z$ が存在する．

2

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とする．次の $f{:}A \to A$ は写像かどうか判断し，写像ならば，集合 $P = \{2, 3\}$ の像，集合 $Q = \{4\}$ の原像，集合 $R = \{1, 2\}$ の原像を求めよ．

(1) {(3,1), (4,2), (1,1), (2,3), (5,3)}

(2) {(2,1), (3,5), (1,4), (2,3), (5,2), (4,2)}

(3) {(4,2), (2,3), (5,4), (1,5), (4,2), (3,4)}

3

任意の集合 A，B，任意の写像 $f{:}A \to B$，任意の $X, X' \subseteq A$ に対して，

$$X \subseteq X' \text{ ならば } f(X) \subseteq f(X')$$

であることを証明せよ．

4

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，$Y = \{a, b, c\}$ とし，写像 $f : X \to Y$ を，$f(1) = a$，$f(2) = b$，$f(3) = b$，$f(4) = a$，$f(5) = b$ で定める．このとき，以下のものを求めよ．

(1) $f^{-1}(a)$
(2) $f^{-1}(c)$
(3) $f^{-1}(\{a, c\})$

5

$f : X \to Y$，$g : Y \to Z$ を写像とする．この時，以下の設問について証明せよ．

(1) $g \circ f$ が全射で g が単射ならば f が全射であることを証明せよ．
(2) $g \circ f$ が単射で f が全射ならば g が単射であることを証明せよ．