離散数学第 14 回演習問題解答例

2016 年 7 月 21 日

1

$\mathbb{Z}$ 上の関係

$$a \sim b \Leftrightarrow a^3 = b^3$$

は同値関係であることを証明せよ.

解答

反射律，対称律，推移律を満たすことを示せばよい.
[反射律]

$$a^3 = a^3 \text{ より } a \sim a.$$

[対称律]

$$a^3 = b^3 \text{ ならば } b^3 = a^3 \text{ であるから，} b \sim a.$$

[推移律]

$$a \sim b \text{ かつ } b \sim c \text{ のとき，} a^3 = b^3 \text{ かつ } b^3 = c^3.$$
$$\text{このとき，} a^3 = c^3 \text{ より，} a \sim c.$$

以上より，同値関係である．□

2

$\mathbb{Z}$ 上の関係

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ (a + b) = 2k$$

は同値関係であることを証明せよ.

解答

1 と同様に反射律，対称律，推移律を満たすことを示せばよい. .

[反射律]

$$a \in \mathbb{Z} \text{ を任意の整数とする．このとき，} a + a = 2a \text{ より } 2 \text{ の倍数であるから，} a \sim a.$$

[対称律]

$$(a + b) = 2k \text{ なら } (b + a) = 2k \text{ であるから，} b \sim a.$$

[推移律]

任意の整数 $a, b, c \in \mathbb{Z}$ とし，$a \sim b$ かつ $b \sim c$ が成り立つとする．このとき $\exists k, k' \in \mathbb{Z}$ があり，$(a + b) = 2k$，$(b + c) = 2k'$ とする．辺々を足し合わせると $(a + c) = 2(k + k' - b)$．$k + k' - b$ は整数であるため，$(a + c)$ は 2 の倍数である．したがって，$a \sim c$.

以上より，同値関係である．□

3

M_n を $n \times n$ 行列全体の集合とする．$A, B \in M_n$ に対して，

$$A \sim B \Leftrightarrow \text{ある正則行列 } P \text{ が存在して，} B = P^{-1}AP \text{ とする．}$$

このとき，$\sim$ は同値関係であることを証明せよ.

解答

[反射律]

$$\forall A \in M_n \text{ に対して } A = E^{-1}AE \text{ なので，} A \sim A.$$

[対称律]

$A \sim B$ ならば正則行列 $\exists P$ $s.t.$ $B = P^{-1}AP$．このとき，$Q = P^{-1}$ は正則行列であり，$A = Q^{-1}BQ$ となる．よって，$B \sim A$.

[推移律]

$A \sim B$ かつ $B \sim C$ とする．正則行列 $\exists P$ $s.t.$ $B = P^{-1}AP$ かつ正則行列 $\exists S$ $s.t.$ $C = S^{-1}(P^{-1}AP)S = R^{-1}AR$ が成り立つ．よって，$A \sim C$.

以上より，$\sim$ は同値関係である．□

4

任意の集合 $A,\ B$ と任意の関数 $f : A \to B$ を考える．
A 上の関係:

$$\text{任意の } x,\ y \in A \text{ に対して，} x \sim y \ \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

とする．このとき，$\sim$ が同値関係であることを証明せよ．

解答
[反射律]

$$f(x) = f(x) \text{ より } x \sim x.$$

[対称律]

$$x \sim y \text{ とする．このとき，} f(x) = f(y) \text{ より } f(y) = f(x) \text{ であるから，} y \sim x \text{ となる．}$$

[推移律]
$x \sim y,\ y \sim z$ とする．このとき $f(x) = f(y)$ かつ $f(y) = f(z)$ より $f(x) = f(z)$ であるから，$x \sim z$ となる．

以上より，$\sim$ は同値関係である．□

5

$(x_1, x_2),\ (y_1, y_2) \in \mathbb{N}^2$

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1 + y_2 = x_2 + y_1)$$

のとき，$\sim$ が同値関係となることを証明せよ．

解答
[反射律]

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_1 \text{ より } (x_1, x_2) \sim (x_1, x_2).$$

[対称律]
$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ とする．このとき，$x_1 + y_2 = x_2 + y_1$ より，$y_1 + x_2 = y_2 + x_1$ であるから，$(y_1, y_2) \sim (x_1, x_2)$ となる．

[推移律]
$(z_1, z_2) \in \mathbb{N}^2$ とし，$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$，$(y_1, y_2) \sim (z_1, z_2)$ とする．このとき，
$x_1 + y_2 = x_2 + y_1$ かつ $y_1 + z_2 = y_2 + z_1$ より，この 2 つの式の辺々を足すと $x_1 + z_2 = x_2 + z_1$.
したがって，$x \sim z$.

以上より，$\sim$ は同値関係である．□