◆解答◆

1

(1) $\mathcal{P}(E) = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, E\}$

(2) 包含関係が成立するのは

$\Phi \subseteq \Phi$, $\Phi \subseteq \{a\}$,$\Phi \subseteq \{b\}$,$\Phi \subseteq \{c\}$, $\Phi \subseteq \{a,b\}$,$\Phi \subseteq \{b,c\}$,$\Phi \subseteq \{a,c\}$, $\Phi \subseteq \{E\}$,

$\{a\} \subseteq \{a\}$,$\{a\} \subseteq \{a,b\}$,$\{a\} \subseteq \{a,c\}$,$\{a\} \subseteq E$,

$\{b\} \subseteq \{b\}$,$\{b\} \subseteq \{a,b\}$,$\{b\} \subseteq \{b,c\}$,$\{b\} \subseteq E$,

$\{c\} \subseteq \{c\}$,$\{c\} \subseteq \{a,c\}$,$\{c\} \subseteq \{b,c\}$,$\{c\} \subseteq E$,

$\{a,b\} \subseteq \{a,b\}$,$\{a,b\} \subseteq E$,

$\{b,c\} \subseteq \{b,c\}$,$\{b,c\} \subseteq E$,

$\{a,c\} \subseteq \{a,c\}$,$\{a,c\} \subseteq E$,

$E \subseteq E$.

比較不可能な元は

$\{a\}$ と $\{b\}$，$\{a\}$ と $\{c\}$，$\{b\}$ と $\{c\}$，$\{a\}$ と $\{b,c\}$，$\{b\}$ と $\{a,c\}$，$\{c\}$ と $\{a,b\}$，$\{a,b\}$ と $\{b,c\}$，$\{a,b\}$ と $\{a,c\}$，$\{b,c\}$ と $\{a,c\}$.

2

(1) b と c は比較不可能

(2) a と b，a と c は比較不可能．a を表わす点はどこに描いても良い．

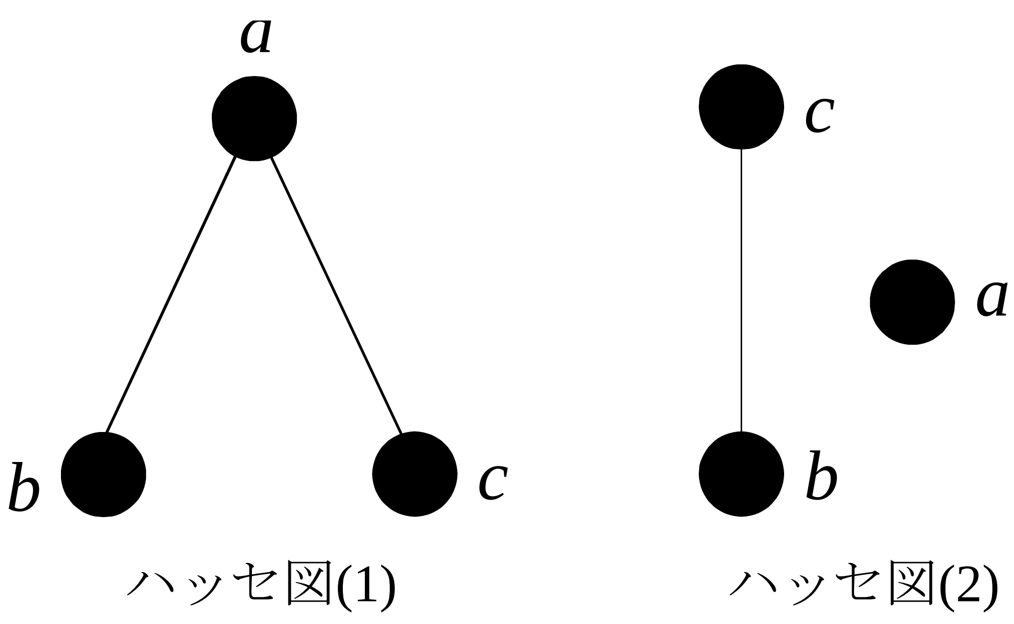

図 1　問題 2 におけるハッセ図

3

(1) $21 = 3 \times 7, 18 = 3^2 \times 2, 15 = 3 \times 5, 12 = 3 \times 2^2, 9 = 3^2, 6 = 3 \times 2$ を参考に，
$1 \mid 3, 3 \mid 6, 3 \mid 9, 6 \mid 12, 3 \mid 15, 9 \mid 18, 3 \mid 21$
6,9,15,21 および 12,18 は比較できないので，図 2 のようなハッセ図が得られる．

(2) 極大元は 12,15,18,21．極小元は 1.

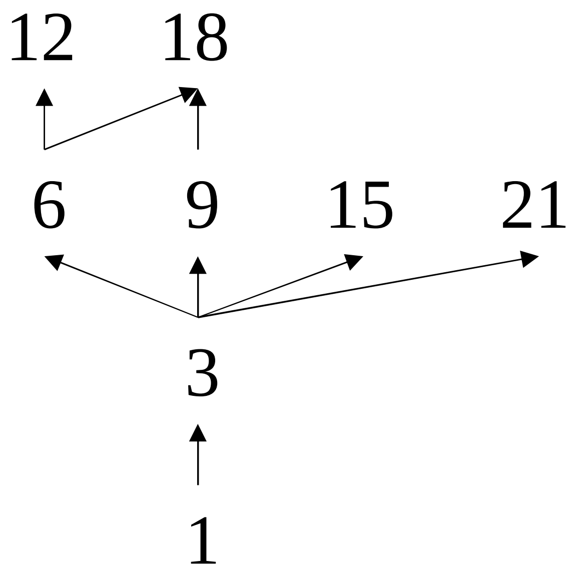

図 2　問題 3 におけるハッセ図

4

- L_1 について
  上界の集合は $\{e, f\}$ であり，上限は $\min\{e, f\} = \{e\}$.
  下界の集合は $\{a\}$ であり，下限は $\max\{a\} = \{a\}$
- L_2 について
  上界の集合は $\{d, e, f\}$ であり上限は $\min\{d, e, f\}$ であるが，存在しない.
  下界の集合は $\{a\}$ であり，下限は $\max\{a\} = \{a\}$

5

Proof. $R(a,d) \land R(d,c)$ であるが，$\neg R(a,c)$ であり，R は推移律をみたさない. □

6

(1) *(Proof)*

$[SO_2]$ を背理法で証明するため，$x, y \in U$ の下で $R(x, y) \wedge R(y, x)$ と仮定する．$[SO_3]$ より $R(y, x)$ が成り立つが，$[SO_1]$ と矛盾する．

したがって，題意成立．□

(2) *(Proof)*

($[SO_1]$ について) $x \in U$ について $x = x$ より $x \nprec x$.

($[SO_3]$ について) $x, y \in U$ の下で $x \prec y \wedge y \prec z$ とする．このとき特に，「$x \preceq y \wedge y \preceq z$」より $x \nprec z$．$x \neq z$ を背理法で証明するため，$x = z$ と仮定すると，「$x \preceq y \wedge y \preceq x$」より $x = y$ となり $x \prec y$ に反する．したがって，$x \preceq z \wedge x \neq z$．すなわち，$x \prec z$．□

(3) *Proof.* $\prec$ が $[SO_4]$ をみたすことを示す．$x, y \in U$ とすると，$\preceq$ は全順序関係であるから，$x \preceq y \vee y \preceq x$ である．$x \preceq y \longrightarrow x = y \vee x \prec y$, $y \preceq x \longrightarrow y = x \vee y \prec x$ が成り立つので，$x \prec y, y \prec x, x = y$ のいずれかが成り立つ． □

(4) (a) *(Proof)*

(反射律) $x \in U$ とする．$x = x$ より「$R(x, x) \vee x = x$」，すなわち，$R'(x, x)$ である．

(反対称律) $x, y \in U$ で $R'(x, y) \wedge R'(y, x)$ と仮定する．$R'(x, y)$ より「$R(x, y) \vee x = y$」である．ここで，$x = y$ ならば証明終わり．$R(x, y)$ ならば，$[SO_2]$ により $\neg R(y, x)$ となるが，$R'(y, x)$ より「$R(y, x) \vee y = x$」であるから，$x = y$ となる．

(推移律) $x, y, z \in U$ で $R'(x, y) \wedge R'(y, z)$ と仮定する．$R'(x, y)$ より「$R(x, y) \vee x = y$」であり，また，$R'(y, z)$ より「$R(y, z) \vee y = z$」である．ここで，$x = y \vee y = z$ が成り立つ場合は題意成立．そうでない場合，$R(x, y) \wedge R(y, z)$ であるから，$[SO_3]$ より，$R(x, z)$ となり $R'(x, z)$ となる．□

(b) *(Proof)*

$x, y \in U$ とする．$[SO_4]$ より「$R(x, y) \vee R(y, x) \vee x = y$」である．$R(x, y) \vee x = y \longrightarrow R'(x, y)$. そうでなければ，$R(y, x)$ であるから $R'(y, x)$．□