

4. 述語論理

植野真臣

スケジュール

4月14日: 第1回: 命題と証明
4月21日: 第2回: 集合の基礎、全称記号、存在記号
4月28日: 第3回: 命題論理
5月12日: 第4回: 述語論理
5月19日: 第5回: 述語と集合
5月26日: 第6回: 直積と冪集合
6月2日: 第7回: 様々な証明法 (1)
6月9日: 第8回: 様々な証明法 (2)
6月16日: 第9回: 様々な証明法 (再帰的定義と数学的帰納法)
6月23日: 第10回: 中間試験
6月30日: 第11回: 写像(関数) (1)
7月7日: 第12回: 写像(関数) (2)
7月14日: 第13回: 写像と関係: 二項関係、関係行列、グラフによる表現
7月21日: 第14回: 同値関係
7月28日: 第15回: 順序関係: 半順序集合、ハッセル図、全順序集合、上界と下界
8月4日: 期末試験(補講があればずれていきます。)

1. 本日の目標

1. 述語論理とは何かを理解する
2. 真理集合
3. 述語の同値性
4. 全称命題と存在命題
5. 述語演算
6. 述語論理での含意

前回まで習ったこと

命題論理

- ソクラテスは人間である
- $2^2 + 1 = 5$
- 2は偶数である

前回まで習ったこと

命題論理

- ソクラテスは人間である
- $2^2 + 1 = 5$
- 2は偶数である

→

より一般化すると
述語論理 になる。

2. 述語

Def

述語(Predicate)とは、値の決まっていない変数(自由変数)を含み、その変数の値を定めれば、真か偽か判断できる記述

- x は人間である
- $x^2 + 1 = 5$
- x は偶数である

離散数学 University of Electro-Communications

3. 記法

自由変数 x についての述語を表すのに、 $P(x)$, $Q(x)$, ...などの記号で表す。
 述語 $P(x)$ の自由変数に値 a を代入したものを $P(a)$ と書く。
 $P(x)$ を「自由変数 x についての述語」という。

例
 $P(x)$:「 x は人間である」, $Q(x)$: $x^2 + 1 = 5$

(1) P (ソクラテス):「ソクラテスは人間である」
 (2) $Q(2)$: $x^2 + 1 = 5$

注) (2)より, 方程式も等式を用いた特別な述語の一つであることがわかる。

7

離散数学 University of Electro-Communications

4. 述語と条件

「条件」という言葉は, しばしば述語と同じ意味で用いられる。
 自由変数 x についての述語 $P(x)$ のことを, x についての条件と呼ぶことがある。
 このとき, 要素 a を述語 $P(x)$ の自由変数 x に代入した命題 $P(a)$ が真であることを, 「要素 a は, 条件 $P(x)$ をみたす」という。

8

離散数学 University of Electro-Communications

5. 真理集合

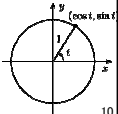
Def
 $P(x)$ は自由変数 x についての述語で, x の**変域**(x の取り得る値の範囲)は集合 U とする。 U の要素のうち, $P(x)$ の自由変数 x に代入した命題が真になるものをすべて集めた集合, 条件 $P(x)$ を満たす U の要素集合を, $A = \{x|P(x)\}$ と書き, 述語 $P(x)$ の**真理集合**という。

9

離散数学 University of Electro-Communications

例 変域が変わると同じ述語でも真理集合が大きく変わる。

- 自由変数 $x \in \mathbb{N}$ についての述語「 $x < 3$ 」を $P(x)$ とする。
 このとき, $A = \{x|P(x)\} = \{0,1,2\}$
- 自由変数 $x \in \mathbb{N}$ についての述語「 $|x| \leq 1$ 」を $P(x)$ とする。
 このとき, $A = \{x|P(x)\} = \{0,1\}$
- 自由変数 $x \in \mathbb{R}$ についての述語「 $|x| \leq 1$ 」を $P(x)$ とする。
 このとき, $A = \{x|P(x)\} = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$
- 自由変数 $x \in \mathbb{C}$ についての述語「 $|x| \leq 1$ 」を $P(x)$ とする。
 このとき, $A = \{x|P(x)\}$ は, 複素数平面の単位円の円周およびその内部



10

離散数学 University of Electro-Communications

例

- 自由変数 $x \in \mathbb{N}$ についての述語「 $x^2 - 4x = 0$ 」の真理集合は, $A = \{x|x^2 - 4x = 0\} = \{0,4\}$
- 自由変数 $x \in \mathbb{N}$ についての述語「 $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ 」の真理集合は, $A = \{x|x^2 - x + \frac{1}{4} = 0\} = \emptyset$
- 自由変数 $x \in \mathbb{R}$ についての述語「 $(x - 2)^2 \geq 0$ 」の真理集合は, $A = \{x|(x - 2)^2 \geq 0\} = \mathbb{R}$
- 自由変数 $x \in \mathbb{R}$ についての述語「 $(x - 2)^2 < 0$ 」の真理集合は, $A = \{x|(x - 2)^2 < 0\} = \emptyset$

11

離散数学 University of Electro-Communications

6. 同値

Def $P(x), Q(x)$ を自由変数 x についての述語とする。
 $\{x|P(x)\} = \{x|Q(x)\}$ であるとき, 述語 $P(x)$ と $Q(x)$ は「**同値である**」という。 $P(x) \equiv Q(x)$ または $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ と書く。

12

離散数学 University of Electro-Communications

例

自由変数 $x \in \mathbb{N}$ についての述語「 $x < 3$ 」を $P(x)$ とする。自由変数 $x \in \mathbb{N}$ についての述語「 $x \leq 2$ 」を $Q(x)$ とする。このとき、 $P(x)$ と $Q(x)$ は同値か？

13

離散数学 University of Electro-Communications

回答

自由変数 $x \in \mathbb{N}$ についての述語「 $x < 3$ 」を $P(x)$ とする。自由変数 $x \in \mathbb{N}$ についての述語「 $x \leq 2$ 」を $Q(x)$ とする。

このとき、 $\{x|P(x)\} = \{x|Q(x)\} = \{0,1,2\}$ 。従って、 $P(x) \equiv Q(x)$

14

離散数学 University of Electro-Communications

例

自由変数 $x \in \mathbb{R}$ についての述語「 $x < 3$ 」を $P(x)$ とする。自由変数 $x \in \mathbb{R}$ についての述語「 $x \leq 2$ 」を $Q(x)$ とする。このとき、 $P(x)$ と $Q(x)$ は同値か？

15

離散数学 University of Electro-Communications

回答

自由変数 $x \in \mathbb{R}$ についての述語「 $x < 3$ 」を $P(x)$ とする。自由変数 $x \in \mathbb{R}$ についての述語「 $x \leq 2$ 」を $Q(x)$ とする。

このとき、 $\{x|P(x)\} = \{x|x < 3\}, \{x|Q(x)\} = \{x|x \leq 2\}$ 。

従って、 $P(x) \neq Q(x)$

16

離散数学 University of Electro-Communications

7. 十分条件と必要条件

Def. $P(x), Q(x)$ を自由変数 x についての述語とする。 $\{x|P(x)\} \subset \{x|Q(x)\}$ となるとき、 $P(x)$ は $Q(x)$ の十分条件であるといい、 $Q(x)$ は $P(x)$ の必要条件であるという。

17

離散数学 University of Electro-Communications

例

自由変数 $x \in \mathbb{R}$ についての述語「 $x \leq 2$ 」を $P(x)$ とする。自由変数 $x \in \mathbb{R}$ についての述語「 $x < 3$ 」を $Q(x)$ とする。

$$\{x|P(x)\} \subset \{x|Q(x)\}$$

なので、 $P(x)$ は $Q(x)$ の十分条件であるといい、 $Q(x)$ は $P(x)$ の必要条件である

18

8. 必要十分条件

Def. $P(x)$ が $Q(x)$ の十分条件であり, かつ, 必要条件であるとき, $P(x)$ は $Q(x)$ の必要十分条件であるという。 $\{x|P(x)\} \subset \{x|Q(x)\}$ かつ $\{x|P(x)\} \supset \{x|Q(x)\}$ であるので, $\{x|P(x)\} = \{x|Q(x)\}$ となる。 $P(x)$ は $Q(x)$ の必要十分条件であるとは, $P(x)$ と $Q(x)$ が同値であることをいう。

19

例

自由変数 $x \in \mathbb{N}$ についての述語「 $x < 3$ 」を $P(x)$ とする。自由変数 $x \in \mathbb{N}$ についての述語「 $x \leq 2$ 」を $Q(x)$ とする。

このとき, $\{x|P(x)\} = \{x|Q(x)\} = \{0,1,2\}$ 。従って, $P(x)$ は $Q(x)$ の必要十分条件である。

20

9. 述語の演算と真理集合

$P(x), Q(x)$ を自由変数 x についての述語とする。このとき, 以下が成り立つ。

Th. 1 (定理1)

$$\{x|P(x) \wedge Q(x)\} = \{x|P(x)\} \cap \{x|Q(x)\}$$

Th. 2 (定理2)

$$\{x|P(x) \vee Q(x)\} = \{x|P(x)\} \cup \{x|Q(x)\}$$

Th. 3 (定理3)

$$\{x|\neg P(x)\} = (\{x|P(x)\})^c$$

重要: 論理演算が集合演算に対応している。

21

例

自由変数 $x \in \mathbb{N}$ についての述語「 $x > 2$ 」を $P(x)$, 「 $x < 5$ 」を $Q(x)$ とする。

このとき,

$$\begin{aligned} \{x|P(x) \wedge Q(x)\} &= \{x|P(x)\} \cap \{x|Q(x)\} \\ &= \{x|x > 2\} \cap \{x|x < 5\} \\ &= \{3,4\} \end{aligned}$$

22

10. 述語論理の含意と同値

$P(x), Q(x)$ を自由変数 x についての述語とする。

Th. 4

$$P(x) \rightarrow Q(x) \Leftrightarrow \neg P(x) \vee Q(x)$$

Th.5

$$P(x) \leftrightarrow Q(x) \Leftrightarrow (P(x) \wedge Q(x)) \vee (\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$$

Th. 6

$$\{x|P(x) \rightarrow Q(x)\} = \{x|P(x)\}^c \cup \{x|Q(x)\}$$

Th.7

$$\begin{aligned} \{x|P(x) \leftrightarrow Q(x)\} &= \\ &= (\{x|P(x)\} \cap \{x|Q(x)\}) \cup (\{x|P(x)\}^c \cap \{x|Q(x)\}^c) \end{aligned}$$

23

Th 5を証明せよ

$$P(x) \leftrightarrow Q(x) \Leftrightarrow (P(x) \wedge Q(x)) \vee (\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$$

24

Th 5を証明せよ

$$P(x) \leftrightarrow Q(x) \Leftrightarrow (P(x) \wedge Q(x)) \vee (\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$$

[証明]

$$\begin{aligned} P(x) \leftrightarrow Q(x) &\Leftrightarrow [\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge [P(x) \vee \neg Q(x)] \\ &\Leftrightarrow [\neg P(x) \wedge P(x)] \vee [P(x) \wedge Q(x)] \vee [\neg P(x) \wedge \neg Q(x)] \vee [Q(x) \wedge \neg Q(x)] \\ &\Leftrightarrow [P(x) \wedge Q(x)] \vee [\neg P(x) \wedge \neg Q(x)] \quad \blacksquare \end{aligned}$$

25

11. 全称命題

Def. 集合 U の変域を持つ x についての述語 $P(x)$ に対して、「すべての x について $P(x)$ 」という命題を全称命題といい、 $\forall x \in U[P(x)]$ と書く。 $\forall x$ を全称量子化子という。

26

12. 存在命題

Def. 集合 U の変域を持つ x についての述語 $P(x)$ に対して、「ある x について $P(x)$ 」という命題を存在命題といい、 $\exists x \in U[P(x)]$ と書く。 $\exists x$ を存在量子化子という。

27

束縛変数

全称命題, 存在命題における x は自由に値を代入できるという自由変数の性質を失っている。全称命題, 存在命題における x のように, 述語や命題の内容を示すためだけに用いられる変数を束縛変数と呼ぶ。

28

例

述語「 $x - 2 = 3$ 」を $P(x)$ と書く。このとき,

- (1) $\forall x \in \mathbb{N}[P(x)]$ は偽
- (2) $\exists x \in \mathbb{N}[P(x)]$ は真

29

13. 全称命題・存在命題の否定

$$\text{Th. 8. } \neg(\forall x \in U[P(x)]) \equiv \exists x \in U[\neg P(x)]$$

30

離散数学 University of Electro-Communications

13. 全称命題・存在命題の否定

Th. 8. $\neg(\forall x \in U[P(x)]) \equiv \exists x \in U[\neg P(x)]$

証明

$\forall x \in U[P(x)]$: U のすべての要素は $P(x)$ を満たす

\Rightarrow 否定 $\neg(\forall x \in U[P(x)])$:

U のある要素は $P(x)$ を満たさない

\Rightarrow U のある要素は $\neg P(x)$ を満たす

\Rightarrow $\exists x \in U[\neg P(x)]$

■

31

離散数学 University of Electro-Communications

13. 全称命題・存在命題の否定

Th.9. $\neg(\exists x \in U[P(x)]) \equiv \forall x \in U[\neg P(x)]$

32

離散数学 University of Electro-Communications

13. 全称命題・存在命題の否定

Th.9. $\neg(\exists x \in U[P(x)]) \equiv \forall x \in U[\neg P(x)]$

証明

$\exists x \in U[P(x)]$: U のある要素は $P(x)$ を満たす

\Rightarrow 否定 $\neg(\exists x \in U[P(x)])$:

U のどの要素も $P(x)$ を満たさない

\Rightarrow U のすべての要素は $\neg P(x)$ を満たす

\Rightarrow $\forall x \in U[\neg P(x)]$

■

注意) Th.8 と9はド・モルガンの法則に対応する

33

離散数学 University of Electro-Communications

14. 「～ならば」の述語表現

命題論理では、 $p \rightarrow q$ は、「 p ならば q 」を意味していた。しかし、述語論理での

$$P(x) \rightarrow Q(x)$$

は、「 $P(x)$ ならば $Q(x)$ 」という意味とはずれがある。「 $P(x)$ ならば $Q(x)$ 」という命題は、

$$\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)]$$

$$\forall x [\neg P(x) \vee Q(x)]$$

という意味。

34

離散数学 University of Electro-Communications

Th.10

$$\forall x \in U [P(x) \rightarrow Q(x)]$$

$$\Leftrightarrow \{x|P(x)\} \subset \{x|Q(x)\}$$

35

離散数学 University of Electro-Communications

Th.10

$$\forall x \in U [P(x) \rightarrow Q(x)]$$

$$\Leftrightarrow \{x|P(x)\} \subset \{x|Q(x)\}$$

[証明]

$$\{x|P(x)\} \subset \{x|Q(x)\} \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in U [x \in \{x|P(x)\} \rightarrow x \in \{x|Q(x)\}]$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in U [P(x) \rightarrow Q(x)]$$

■

36

離散数学 University of Electro-Communications

15. 「～ならば」命題の否定

命題 「 $P(x)$ ならば $Q(x)$ 」の否定
は、「 $P(x)$ かつ $\neg Q(x)$ を満たす要素が存在する」

37

離散数学 University of Electro-Communications

15. 「～ならば」命題の否定

命題 「 $P(x)$ ならば $Q(x)$ 」の否定
は、「 $P(x)$ かつ $\neg Q(x)$ を満たす要素が存在する」

証明

$$\begin{aligned} & \neg(\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]) \\ \equiv & \neg(\forall x[\neg P(x) \vee Q(x)]) \\ \equiv & \exists x[\neg(\neg P(x) \vee Q(x))] \\ \equiv & \exists x[\neg\neg P(x) \wedge \neg Q(x)] \\ \equiv & \exists x [P(x) \wedge \neg Q(x)] \end{aligned}$$

「 $P(x)$ ならば $Q(x)$ 」を否定するためには、 $P(x)$ かつ $\neg Q(x)$ を満たす要素を一つでよいので見つけて示せばよい。この要素を「**反例**」と呼ぶ。

38

離散数学 University of Electro-Communications

例題

述語 $P(x)$:「 $x \geq 0$ 」と述語 $Q(x)$:「 $x > 1$ 」について以下の命題が成り立たないことを証明せよ。
 $\forall x \in \mathbb{N}[P(x) \rightarrow Q(x)]$

39

離散数学 University of Electro-Communications

例題

述語 $P(x)$:「 $x \geq 0$ 」と述語 $Q(x)$:「 $x > 1$ 」について以下の命題が成り立たないことを証明せよ。
 $\forall x \in \mathbb{N}[P(x) \rightarrow Q(x)]$

証明 (反例は0か1どちらかを挙げればよい)

$1 \in \mathbb{N}$ は、命題 $P(x)$:「 $x \geq 0$ 」を満たすが、命題 $Q(x)$:「 $x > 1$ 」は満たさない。すなわち、 $1 \in \mathbb{N}$ は命題の否定($P(x) \wedge \neg Q(x)$)を満たす。

従って、反例が存在し、
 $\forall x \in \mathbb{N}[P(x) \rightarrow Q(x)]$
は成り立たない。

40

離散数学 University of Electro-Communications

16. 空ゆえに真

命題論理 $p \rightarrow q$
命題 $p \rightarrow q$ は、「 p が偽のときには、 q の値に関わらず命題 $p \rightarrow q$ は真」

41

離散数学 University of Electro-Communications

16. 空ゆえに真

命題論理 $p \rightarrow q$
命題 $p \rightarrow q$ は「 p が偽のときには、 q の値に関わらず命題 $p \rightarrow q$ は真」

述語論理 $P(x) \rightarrow Q(x)$
「述語 $P(x)$ の真理集合が空であれば、述語 $Q(x)$ が何であれ、 $P(x) \rightarrow Q(x)$ は真」
「条件 $P(x)$ を満たす要素が存在しなければ、 $P(x) \rightarrow Q(x)$ は「空ゆえに真」(vacuously true)」

42

離散数学 University of Electro-Communications

例

普遍集合 $U: \{\text{日本の小学生}\}$
 $P(x): x$ は車を運転する。
 $Q(x): x$ は運転免許を持っている。

$P(x) \rightarrow Q(x)$: 空ゆえに真

43

離散数学 University of Electro-Communications

例題1

自由変数 $x \in \mathbb{R}$ について, $P(x): (x-2)^2 < 0$,
 $Q(x): x^2 < 0$

とすると $P(x) \rightarrow Q(x)$ は「空ゆえに真」を証明せよ。

44

離散数学 University of Electro-Communications

例題1

自由変数 $x \in \mathbb{R}$ について, $P(x): (x-2)^2 < 0$,
 $Q(x): x^2 < 0$

とすると $P(x) \rightarrow Q(x)$ は「空ゆえに真」を証明せよ。
[証明] $\forall x \in \mathbb{R} [P(x) \rightarrow Q(x)] \equiv \forall x \in \mathbb{R} [\neg P(x) \vee Q(x)]$
 $\equiv \forall x \in \mathbb{R} [(x-2)^2 \geq 0] \vee Q(x)$
 $\neg P(x) = ((x-2)^2 \geq 0)$ は $\forall x \in \mathbb{R}$ について真。
 $Q(x)$ に関わらず,
 $\forall x \in \mathbb{R} [P(x) \rightarrow Q(x)]$ は真 ■

45

離散数学 University of Electro-Communications

例題2

自由変数 $x \in \mathbb{R}$ について, 条件 $P(x)$ を満たす要素が存在しなければ, $P(x) \rightarrow Q(x)$ は「空ゆえに真」を証明せよ。

46

離散数学 University of Electro-Communications

例題2 自由変数 $x \in \mathbb{R}$ について, 条件 $P(x)$ を満たす要素が存在しなければ, $P(x) \rightarrow Q(x)$ は「空ゆえに真」を証明せよ。

証明 $\forall x \in \mathbb{R} [P(x) \rightarrow Q(x)]$
 $\equiv \forall x \in \mathbb{R} [\neg P(x) \vee Q(x)]$

$\{x | \neg P(x)\} = (\{x | P(x)\})^c$ より,
 $\forall x \in \mathbb{R} [P(x) \rightarrow Q(x)]$ の真理集合は
 $(\{x | P(x)\})^c \cup \{x | Q(x)\}$

ここで, $\{x | P(x)\} = \emptyset$ より, $(\{x | P(x)\})^c = \mathbb{R}$
 $(\{x | P(x)\})^c \cup \{x | Q(x)\} = \mathbb{R} \cup \{x | Q(x)\} = \mathbb{R}$
 $Q(x)$ に関わらず, 真理集合が \mathbb{R} となり,
 $\forall x \in \mathbb{R} [P(x) \rightarrow Q(x)]$ は真 ■

47

離散数学 University of Electro-Communications

17. 述語論理と人工知能

述語論理は初期の人工知能推論

$P(x): x$ は人間である。
 $Q(x): x$ は死ぬ。

$[P(x) \rightarrow Q(x)]$
 $P(\text{ソクラテス}): \text{「ソクラテスは人間である」}$ 真
 \downarrow
 $Q(\text{ソクラテス}): \text{「ソクラテスは死ぬ」}$ 真

48

離散数学 University of Electro-Communications

三段論法

$P(x)$: x はギリシヤ人である。
 $Q(x)$: x は人間である。
 $R(x)$: x は 死ぬ。

$\forall x[P(x) \rightarrow Q(x) \rightarrow R(x)]$

$P(\text{ソクラテス}) \rightarrow Q(\text{ソクラテス}) \rightarrow R(\text{ソクラテス})$
 $P(\text{ソクラテス})$: 「ソクラテスは人間である」 \rightarrow
 $Q(\text{ソクラテス})$: 「ソクラテスは 死ぬ」

49

離散数学 University of Electro-Communications

例題: 三段論法

$[P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge [Q(x) \rightarrow R(x)] \rightarrow [P(x) \rightarrow R(x)]$
 を証明せよ。

50

離散数学 University of Electro-Communications

例題: 三段論法

$[P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge [Q(x) \rightarrow R(x)] \rightarrow [P(x) \rightarrow R(x)]$
 を証明せよ。

[証明]

$\neg([P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge [Q(x) \rightarrow R(x)]) \vee (\neg P(x) \vee R(x))$
 $\equiv \neg(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(x) \vee R(x)) \vee (\neg P(x) \vee R(x)) \equiv$
 $(P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (Q(x) \wedge \neg R(x)) \vee \neg P(x) \vee R(x) \equiv$
 $\{[P(x) \wedge \neg Q(x)] \vee \neg P(x)\} \vee \{[Q(x) \wedge \neg R(x)] \vee R(x)\}$
 $\equiv \neg Q(x) \vee Q(x)$
 は $\forall x$ について 真 (恒真命題)

$[P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge [Q(x) \rightarrow R(x)] \rightarrow [P(x) \rightarrow R(x)]$ は真 ■

51

離散数学 University of Electro-Communications

推論

$P(x)$: x はギリシヤ人である。
 $Q(x)$: x は人間である。
 $R(x)$: x は 死ぬ。

$R(\text{ドラえもん})$ 偽: ドラえもんは死なない。
 \rightarrow ドラえもんは人間でない
 \rightarrow ドラえもんはギリシヤ人でない

52

離散数学 University of Electro-Communications

対偶

$P(x) \rightarrow Q(x) \Leftrightarrow \neg Q(x) \rightarrow \neg P(x)$

$\neg R(\text{ドラえもん})$: ドラえもんは死なない。
 $\rightarrow \neg Q(\text{ドラえもん})$: ドラえもんは人間でない。

$\neg Q(\text{ドラえもん})$: ドラえもんは人間でない。
 $\rightarrow \neg P(\text{ドラえもん})$: ドラえもんはギリシヤ人ではない。

53

離散数学 University of Electro-Communications

注意「真の述語命題からは何も推論できない」

$P(x)$: x はギリシヤ人である。
 $Q(x)$: x は人間である。
 $R(x)$: x は 死ぬ。

$R(\text{スチュアート・リトル(ネズミ)})$:
 スチュアート・リトルは死ぬ \leftrightarrow スチュアート・リトルは人間である
 \leftrightarrow スチュアート・リトルはギリシヤ人である
 \rightarrow 帰納推論(確率推論へ)

54

離散数学 University of Electro-Communications

1990年代以降

その他の欠点

- ・計算量が爆発する
- ・人間が知識を入力しないと学習できない
- ・例外がある場合処理が複雑
- ・不確実な知識を扱えない

↓

人工知能分野は 機械学習、確率的アプローチにシフト。現在のAIの繁栄につながる。

55

離散数学 University of Electro-Communications

18. まとめ

1. 述語論理とは何かを理解する
2. 真理集合
3. 述語の同値性
4. 全称命題と存在命題
5. 述語演算
6. 述語論理での含意

56

離散数学 University of Electro-Communications

演習問題

57

離散数学 University of Electro-Communications

問題1 (1)

$U = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 10\}$ について,
 $P_1(x) \Leftrightarrow "x \leq 5", P_2(x) \Leftrightarrow "x > 3", P_3(x) \Leftrightarrow "x > 7", P_4(x) \Leftrightarrow "x^2 - 9x + 20 = 0"$.

(1) 次の述語の真理集合を外延的記法で示せ。

- (a) $P_1(x)$,
- (b) $P_4(x)$,
- (c) $\neg P_2(x)$,
- (d) $P_2(x) \wedge \neg P_4(x)$,
- (e) $P_1(x) \vee P_2(x)$,
- (f) $P_3(x) \wedge P_4(x)$.

58

離散数学 University of Electro-Communications

問題1 (2)

$U = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 10\}$ について, $P_1(x) \Leftrightarrow "x \leq 5", P_2(x) \Leftrightarrow "x > 3", P_3(x) \Leftrightarrow "x > 7", P_4(x) \Leftrightarrow "x^2 - 9x + 20 = 0"$.

次の文が「必要十分条件である」「十分条件だが必要条件ではない」「必要条件だが十分条件ではない」「十分条件でも必要条件でもない」のどれにあてはまるか文を完成させよ。

- (a) $P_3(x)$ は $P_2(x)$ の
- (b) $P_1(x)$ は $P_4(x)$ の
- (c) $P_4(x)$ は $P_1(x) \wedge P_2(x)$ の
- (d) $P_3(x)$ は $\neg P_4(x)$ の
- (e) $P_1(x) \vee P_3(x)$ は $P_2(x)$ の
- (f) $\neg P_1(x) \vee P_4(x)$ は $P_2(x)$ の
- (g) $P_1(x) \vee P_2(x)$ は $P_4(x)$ の
- (h) $P_1(x) \wedge P_3(x)$ は $P_4(x)$ の

59

離散数学 University of Electro-Communications

問題2. 変数 $x \in \mathbb{R}$ についての以下の述語の否定命題を書け。

1. $\forall x \in \mathbb{R}(x^2 - 3x + 2 = 0)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}(x^2 - 2x + 3 > 0)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}(x > 1 \vee x < 2)$
4. $\exists x \in \mathbb{R}(x^2 - 3x + 2 = 0)$
5. $\exists x \in \mathbb{R}(x^2 - 2x + 3 > 0)$
6. $\exists x \in \mathbb{R}(x \neq 0 \wedge x^2 = 0)$

60

問題3. $x \in \mathbb{R}$ についての次の命題の真偽を答えよ。偽の場合は、その否定命題を述べ、それが真であることを証明せよ。

1. $\forall x \in \mathbb{R} (x^2 - 3x + 2 \geq 0)$
2. $x > 3 \rightarrow x > \pi$
3. $x^2 = 4 \rightarrow x = 2$
4. $x < 1 \rightarrow x^2 < 1$

61

問題4 自由変数 $x \in \mathbb{R}$ についての述語 $P(x)$ を「 $x^2 < 0$ 」、述語 $Q(x)$ を「 $x = 1$ 」とする。 $P(x)$ が偽のとき、 $Q(x)$ の真偽に関係なく、 $P(x) \rightarrow Q(x)$ が成り立つことを証明せよ。

62