

# 離散数学第 15 回演習問題類題解答例

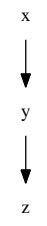
2016 年 7 月 28 日

1

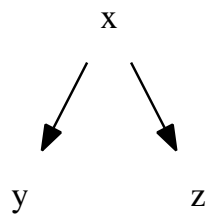
$X = \{a, b, c\}$  とする。 $X$  上の順序はいくつあるか答えよ。また全順序はいくつあるか。

解答

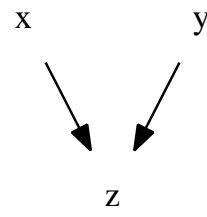
$\{x, y, z\} = \{a, b, c\}$  として、その順序集合として型を分類すると、以下の (1)~(5) に表される。



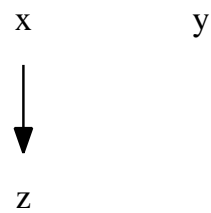
(1)



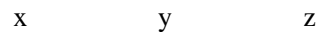
(2)



(3)



(4)



(5)

- (1)  $\{(x, x), (y, x), (z, x), (y, y), (z, y), (z, z)\}$  であり,  $x, y, z$  の選び方で 6 通りある .
- (2)  $\{(x, x), (y, x), (z, x), (y, y), (z, z)\}$  であり,  $x, y, z$  の選び方で 3 通りある .
- (3)  $\{(x, x), (z, x), (y, y), (z, y), (z, z)\}$  であり,  $x, y, z$  の選び方で 3 通りある .
- (4)  $\{(x, x), (z, x), (y, y), (z, z)\}$  であり,  $x, y, z$  の選び方で 6 通りある .
- (5)  $\{(x, x), (y, y), (z, z)\}$  であり,  $x, y, z$  の選び方で 1 通りある .

以上より, 19 通りの順序がある . このうち全順序は (1) のみであるから, 6 通りである .

## 2

整除とは, ある整数を他の整数で割ったときに答えが整数となり割り切れることである .  
ここで, 次の集合は整除順序で全順序集合になるか調べよ .

- (1)  $\{24, 2, 6\}$  解答

全順序集合である .

- (2)  $\{3, 15, 5\}$

全順序集合ではない (3 と 5 は互いに割り切れないから) .

- (3)  $\{15, 5, 30\}$

全順序集合である .

- (4)  $\{2, 8, 32, 4\}$

全順序集合である .

- (5)  $\{1, 2, 3, \dots\}$

全順序集合ではない (任意の 2 つの素数は互いに割り切れないから) .

- (6)  $\{7\}$

全順序集合である .

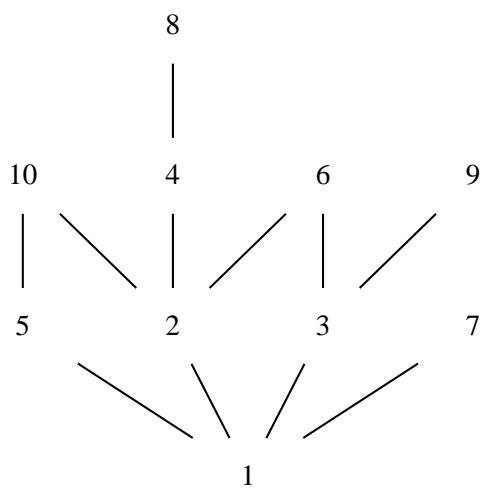
3

次の順序集合のハッセ図を描け．

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$a \preceq b$  : “ $b$  は  $a$  の約数”

解答

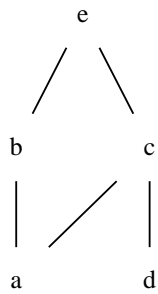


ハッセ図

4

$A = \{a, b, c, d, e\}$  とする .  $a \ll c, d \ll c, b \ll e, a \ll b, c \ll e$  の半順序が定義されているとき ,  
これをハッセ図で図示せよ .

解答



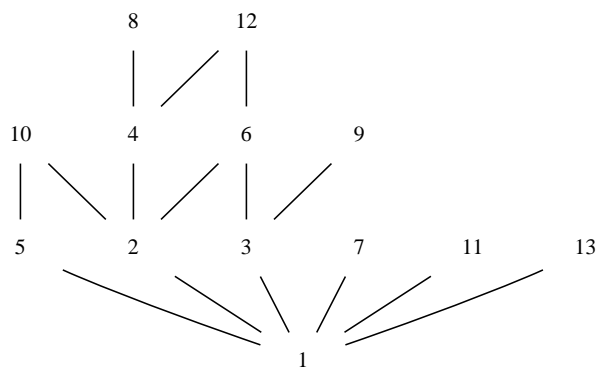
ハッセ図

5

順序集合  $A = \{1, 2, 3, \dots, 12, 13\}$  について

(1)  $A$  上の整除順序によるハッセ図を描け .

解答



ハッセ図

(2)  $A$  の極大元, 極小元を求めよ.

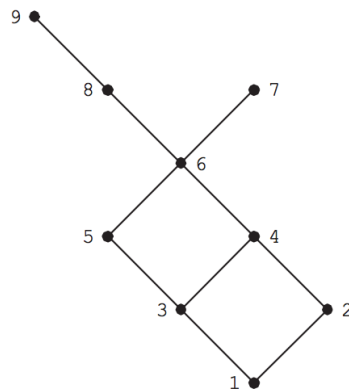
解答

(a) 極大元: 1

(b) 極小元: 4, 6, 7, 9, 10

## 6

$W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  に次の発生図で順序を定義するとき, 以下の部分集合に対する上界,  $\sup B$ , 下界,  $\inf B$  をそれぞれ求めなさい.



(1)  $A = \{2, 3, 5\}$

解答

上界:  $\{6, 7, 8, 9\}$ ,  $\sup A: 6$ , 下界: 1,  $\inf A: 1$

(2)  $B = \{3, 6, 8\}$

解答

上界:  $\{8, 9\}$ ,  $\sup B: 8$ , 下界:  $\{1, 3\}$ ,  $\inf B: 3$

(3)  $C = \{2, 5, 7, 8\}$

解答

上界: なし,  $\sup C: \text{なし}$ , 下界: 1,  $\inf C: 1$