2. 集合の基礎と 全称記号・存在記号

植野真臣

スケジュール

4月14日：第1回：命題と証明
4月21日：第2回：集合の基礎、全称記号、存在記号
4月28日：第3回：命題論理
5月12日：第4回：述語論理
5月19日：第5回：述語と集合
5月26日：第6回：直積と冪集合
6月2日：第7回：様々な証明法 (1)
6月9日：第8回：様々な証明法 (2)
6月16日：第9回：様々な証明法 （再帰的定義と数学的帰納法）
6月23日：第10回：中間試験
6月30日：第11回：写像（関数）(1)
7月7日：第12回：写像 (関数) (2)
7月14日：第13回：写像と関係：二項関係、関係行列、グラフによる表現
7月21日：第14回：同値関係
7月28日：第15回：順序関係：半順序集合、ハッセ図、全順序集合、上界と下界
8月4日：期末試験（補講があればずれていきます。）

1. 本日の目標

1. 集合の記述法（外延的記法、内包的記法）が正しく使える
2. 全称記号∀、存在記号∃が使える
3. 部分集合と包含関係を理解する
4. 集合の演算（和、積、補、差、素，要素数）

2. 重要な集合

$\emptyset$ ：
$\mathbb{N}$ ：
$\mathbb{Z}$ ：
$\mathbb{Q}$:
$\mathbb{R}$:
$\mathbb{C}$ ：

2. 重要な集合

$\emptyset$ ： 空集合 （empty set）（ギリシャ語φとは違う）
$\mathbb{N}$ ：自然数集合 (0を含む）
$\mathbb{Z}$ ：整数集合
$\mathbb{Q}$: 有理数集合
$\mathbb{R}$: 実数集合
$\mathbb{C}$ ：複素数集合

要素数が有限の集合を有限集合(finite set),要素数が無限の集合を無限集合(infinite set)と呼ぶ

3. 集合の「要素」の記法

ある対象aが集合Aの要素であるとき
$a \in A$ と書く。
外延的記法：$A = \{1,2,3,4,5\} = \{3,2,5,1,4\}$ （有限集合）
$A = \{1,3,5,7 \cdots\}$ （無限集合）
内包的記法：$A = \{n |\ 1 \leq n \leq 5, n \in \mathbb{N}\}$
（∩(かつ)を示す場合にはカンマで区切る）
例
$A = \{n |\ 1 \leq n \leq 5, n \in \mathbb{N}, n\text{は奇数}\}$

例

$A = \{n | n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5\}$ を外延的記法で表せ。

例

$A = \{n | n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5\}$ を外延的記法で表せ。
$A = \{1,2,3,4,5\}$

例

$A = \{2,4\}$を先の例の内包的記法に条件を足して表せ。

例

$A = \{2,4\}$を先の例の内包的記法に条件を足して表せ。

$A = \{n |\ 1 \leq n \leq 5, n \in \mathbb{N}, n$は偶数$\}$

4. 全称記号

命題
「すべての自然数は0以上の値をとる」

4. 全称記号

命題
「すべての自然数は0以上の値をとる」
↓
「任意の自然数nについて，$n \geq 0$が成り立つ」

4. 全称記号

命題

「すべての自然数は0以上の値をとる」

↓

「任意の自然数nについて，$n \geq 0$が成り立つ」

↓

「$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0$」

∀：意味：すべての(all, any)　読み方: “for all”

日本語訳：

「$\mathbb{N}$に属するすべてのnについて, $n \geq 0$が成り立つ」

例

「すべての実数xについて, $x^2 \geq 0$」

を全称記号を用いて表せ.

例

「すべての実数xについて, $x^2 \geq 0$」

を全称記号を用いて表せ.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$$

5. 存在記号

命題

「実数xについて$x^2 + 7x < 0$となる場合がある」

5. 存在記号

命題

「実数xについて$x^2 + 7x < 0$となる場合がある」

↓

「$x^2 + 7x < 0$となる実数xが存在する」

5. 存在記号

命題

「実数xについて$x^2 + 7x < 0$となる場合がある」

↓

「$x^2 + 7x < 0$となる実数xが存在する」

↓

「$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 7x < 0$」

∃：意味：存在する(Exist)　読み方: “there exists”

例

「実数xについて$x^2 > 0, x < 0$となる場合がある」
を存在記号を用いて表せ.

例

「実数xについて$x^2 > 0, x < 0$となる場合がある」
を存在記号を用いて表せ.

$$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 0, x < 0$$

6. 部分集合

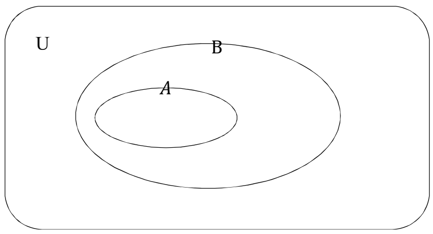
Def (定義： Definitionのこと)
対象としているもの全体を普遍集合(全体集合)と呼び，Uと書く. また，要素を一つも持たない集合を空集合といい，$\emptyset$で表す.

Def
集合Aの要素が集合Bの要素でもあるとき，AはBの部分集合であるといい,
$A \subseteq \mathrm{B}$ または $\mathrm{B} \supseteq \mathrm{A}$
で表す.

部分集合の数学的定義

Def $A \subseteq \mathrm{B} \Leftrightarrow \forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$

→は「ならば」という意味、
xがAに含まれているならば，そのxのすべてはBに含まれる.



注意

Def $A \subseteq \mathrm{B} \Leftrightarrow \forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$

この部分集合の定義では，B自身もBの部分集合であることがわかる.

同等

Def $A \subseteq \mathrm{B}\ and\ B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$

AとBは等しいという.

真部分集合

Def $A \subseteq B$ and $A \neq B \Leftrightarrow A \subset B$

AはBの真部分集合であるという.

Def $A \subset B \Leftrightarrow \forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$
and $\exists y[y \in B \rightarrow y \notin A]$

例

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

例題 次の命題は正しいか？

(1) $A = \{1,2,3\}$, B= $\{1,2,3,4\}$ に対して $A \subseteq B$

(2) $A = \{1,2,3\}$, B= $\{2,3,4\}$ に対して $A \subseteq B$

例題 次の命題は正しいか？

(1) $A = \{1,2,3\}$, B= $\{1,2,3,4\}$ に対して $A \subseteq B$

真

証明

A の要素1,2,3はすべてBの要素で,

$$\forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$$

が成り立つ. 定義より

$\forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$ならば$A \subseteq B$

従って、

$A = \{1,2,3\}$, B= $\{1,2,3,4\}$ に対して $A \subseteq B$

例題 次の命題は正しいか？

(2) $A = \{1,2,3\}$, B= $\{2,3,4\}$ に対して $A \subseteq B$

偽

証明

Aの要素で1はBの要素でない. 従って

$$\exists x[x \in A \rightarrow x \notin B] \not\Leftrightarrow \forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$$

定義より

「$\forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$が成り立たない」ならば

「$A \subseteq$ Bは成り立たない」

従って、命題は偽 ■

重要
全称記号∀の否定に存在記号∃が用いられる

$$\forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$$

「Aのすべての要素がBの要素である」の否定

「Aの要素の中でBの要素でないものがある」

$$\exists x[x \in A \rightarrow x \notin B]$$

「～ならば ～である」の否定は、反例を示せばよい。

■

7. 集合演算

集合A, Bと全体集合をUとする. A, BをUの部分集合として以下の演算を定義する.

(1) 和集合

(2) 積集合

(3) 補集合

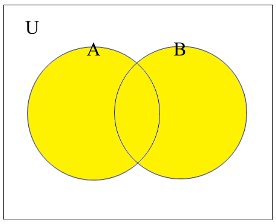
(4) 差

(1) 和集合

$A \cup B = \{x | x \in A, or\ x \in B\}$

集合A, Bと全体集合をUとする.

このとき, A, Bの和集合とはAとBの要素をすべて併せた集合のこと



(2) 積集合

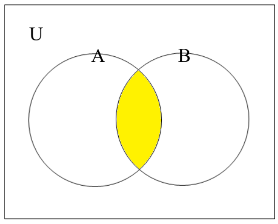
$A \cap B = \{x | x \in A, and\ x \in B\}$

集合A, Bと全体集合をUとする.

このとき,

A, Bの積集合とは、

AとBの共通要素のみからなる集合のこと



(3) 補集合

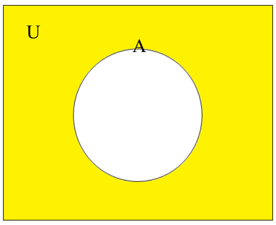
$\bar{A} = \{x | x \in U, and\ \ x \notin A\}$

全体集合をUとし、その部分集合Aを考える.

このとき,

Aの補集合とは

Uのうち Aに含まれない要素の集合のこと



(4)差

$A - B = \{x | x \in A, and\ \ x \notin B\}$

集合A, Bと全体集合をUとする.

このとき,

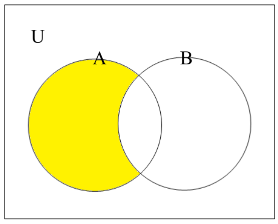
差$A - B$とは、

AからBの要素を除いた集合のこと

$A - B = \mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$と書くこともある.

$A - B = \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}$

と書ける.



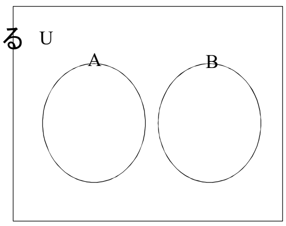
(5) 素

集合A, Bと全体集合をUとする.

AとBに共通要素がない場合

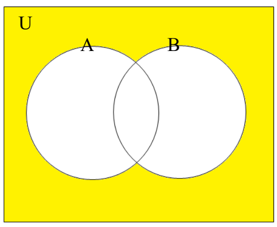
$A \cap B = \emptyset$

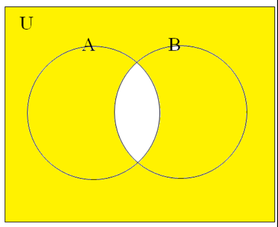
このときAとBは素であるという.



8. ド・モルガンの法則

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ $\qquad$ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$





例

$U = \{1,2,3,4,5\}$
$A = \{1,2,3\}$
$B = \{4,5\}$
このとき,
(1)和集合$A \cup B$
(2)積集合$A \cap B$
(3)補集合$\bar{A}$, $\bar{B}$
(4) $A - B$
(5) $\bar{A} \cap \bar{B}$
を求めよ.

例

$U = \{1,2,3,4,5\}$
$A = \{1,2,4\}$
$B = \{4,5\}$
このとき,
(1)和集合$A \cup B = \{1,2,4,5\}$
(2)積集合$A \cap B = \{4\}$
(3)補集合$\bar{A} = \{3,5\}$, $\bar{B} = \{1,2,3\}$
(4) $A - B = \{1,2\}$
(5) $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B} = \{3\}$
を求めよ.

9. 要素の個数

集合Aが有限集合の場合，要素の数を

$$n(A) \quad や \quad |A|$$

で表す.

Th. 1.

Uを有限な普遍集合とする。集合A, Bについて以下が成り立つ。

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

証明

Th 1 Uを有限な普遍集合とする。集合A, Bについて
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

[証明]

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B) \\ &= n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B) \\ &\quad + n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \end{aligned}$$

従って

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ■

系 1 Corollary 1

Uを有限な普遍集合とする。

$$n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$$

系 1 Corollary 1

Uを有限な普遍集合とする。

$$n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$$

[証明]
Th 1より, $n(U) = n(\bar{A}) + n(A) - n(\bar{A} \cap A)$.
$\bar{A} \cap A = \emptyset$より,

$$n(U) = n(\bar{A}) + n(A)$$

従って,
$n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$ ■

例

普遍集合U＝$\{m|0 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$について
A＝$\{m|m = 2k, k \in \mathbb{N}\}, B$＝
$\{m|m = 2k + 1, k \in \mathbb{N}\}$,
とするとき，以下を求めよ。

$$n(A), n(B), n(A \cap B), n(A \cup B)$$

例

普遍集合U＝$\{m|1 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$について
A＝$\{m|m = 2k, k \in \mathbb{N}\}, B$＝
$\{m|m = 2k + 1, k \in \mathbb{N}\}$,
とするとき,

$$n(A) = 26$$
$$n(B) = 25$$
$$n(A \cap B) = 0$$
$$n(A \cup B) = 51$$

8. まとめ

1. 集合の記述法（外延的記法、内包的記法）
2. 全称記号∀、存在記号∃
3. 部分集合と包含関係
4. 集合の演算（和、積、補、差、素,要素数）

演習問題1. 次の集合を外延的記法でかけ。

(1) $A = \{n|\ 1 \leq n \leq 10, n \in \mathbb{N}, n$は奇数$\}$
(2) $B = \{n \mid n = 3k - 2, k \in \mathbb{N}\}$
(3) $C = \{x \mid x^2 + x - 6 < 0, x \in \mathbb{Z}\}$
(4) $D = \{x \mid 2x^2 - 7x + 3 = 0, x \in \mathbb{N}\}$

演習問題2. 次の集合を内包的記法でかけ。

(1) $A = \{3,6,9,12,15\}$
(2) $B = \{\cdots, -10, -5, 0, 5, 10, \cdots\}$
(3) $C = \{1,4,9,16,25,36\}$
(4) $D = \{0,4,8,12,16, \cdots\}$

演習問題3. 次の数について数の集合$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$に属するか属さないかを$\in$か$\notin$を用いて表現せよ。

(1) $\frac{1}{2}$

(2) $\sqrt{3}$

(3) -2

(4) $1+i$

演習問題4. 次の数式を日本語であらわせ

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$
(2) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x < 0$
(3) $\exists n \in \mathbb{N}, \sqrt{n} \in \mathbb{N}$
(4) $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$
(5) $\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, x + y = 0$
(6) $\exists a \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x \geq a$
(7) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \mathrm{ax} + \mathrm{b} = 0$
(8) $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| < \mathrm{a}$

演習問題5. 次の日本語を全称記号，存在記号を用いて表せ

(1)複素数の中には、2乗すると実数になる数が存在する
(2)すべての実数xについて、$x^2 - 2x + 2 \geq 0$が成り立つ
(3) 0と異なる任意の実数xについて、$xy = 1$となる実数yが存在する
(4)任意の整数nに対し、$\mathrm{n} + \mathrm{a} = \mathrm{n}$となる定数aが整数の中に存在する
(5)複素数の中には絶対値が1となる数が存在する
(6)すべての実数xについて、$e^x > 0$である
(7)任意の実数xに対し、$x^2 + x + 2 > a$となる定数aが自然数の中に存在する
(8)任意の実数aに対し、$x^2 + x + 2 > a$となる有理数xが存在する

演習問題6.

(1)　$A = \{a, b, c\}$に対して，Aの部分集合をすべて挙げよ．Aの部分集合の中で$\{a\} \in \mathrm{X}$　となる集合X をすべて求めよ．

(2)命題$A = \{2,3,5,6\}$, $\mathrm{B} = \{2,3,4,8,9\}$　に対して　$A \subseteq \mathrm{B}$が成り立たないことを証明せよ．

演習問題7.

$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
$A = \{1,3,5,7,9\}$
$B = \{1,4,7\}$
このとき，
(1)和集合$A \cup B$
(2)積集合$A \cap B$
(3)補集合$\bar{A}$, $\bar{B}$
(4) $A - B$
を求めよ．

演習問題8. $U = \{n | 1 \leq n \leq 15, n \in \mathbb{Z}\}$
を全体集合とし、部分集合
$\mathrm{A} = \{a | a$は素数$\}$, $B = \{b | b$は奇数$\}$, $\mathrm{C} = \{c | c$は3の倍数$\}$を考える．以下の要素を列挙せよ．
(1) A, B, C
(2) $B \cup C$
(3) $B \cap C$
(4)$\bar{A}$
(5) $\overline{A \cup C}$
(6) $\bar{B} \cap C$
(7)$\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

演習問題9. 次の命題を肯定形に変えよ。

(1)「私の身長は160cm以上であり、かつ体重は50kg以上」ということはない。

(2)このボールは青いか、または赤くはない。

(3)「すべての人が冷蔵庫を持っている」とは限らない

(4)「冷蔵庫を持っていない人がいる」ということはない

(5) (3)(4)を全称記号∀と存在記号∃を用いて書け。

演習10.

普遍集合$U=\{m|0 \le m \le 100,\ m \in \mathbb{N}\}$について
$A=\{m|m=2k, k \in \mathbb{N}\}, B=\{m|m=3k, k \in \mathbb{N}\}$,
とするとき，以下を求めよ。

$$n(A), n(B), n(A \cap B), n(A \cup B)$$
$$n(\bar{A} \cap B), n(\bar{A} \cup \bar{B})$$