

離散数学 University of Electro-Communications

12.写像(関数) (2)

植野真臣

離散数学 University of Electro-Communications

本授業の構成

4月14日: 第1回: 命題と証明
 4月21日: 第2回: 集合の基礎、全称記号、存在記号
 4月28日: 第3回: 命題論理
 5月12日: 第4回: 述語論理
 5月19日: 第5回: 述語と集合
 5月26日: 第6回: 直積と冪集合
 6月2日: 第7回: 様々な証明法 (1)
 6月9日: 第8回: 様々な証明法 (2)
 6月16日: 第9回: 様々な証明法 (再帰的定義と数学的帰納法)
 6月23日: 第10回: 中間試験
 6月30日: 第11回: 写像(関数) (1)
7月7日: 第12回: 写像(関数) (2)
 7月14日: 第13回: 写像と関係: 二項関係、関係行列、グラフによる表現
 7月21日: 第14回: 同値関係
 7月28日: 第15回: 順序関係: 半順序集合、ハッセ図、全順序集合、上界と下界
 8月4日: 期末試験(補講があればずれていきます。)

2

離散数学 University of Electro-Communications

1. 本日の目標

- ① 像と原像
- ② 逆像
- ③ 写像の合成
- ④ 逆写像

離散数学 University of Electro-Communications

復習 以下はどのような写像か?

?????

?????

4

離散数学 University of Electro-Communications

復習 以下はどのような写像か?

部分写像

写像(関数)
⊆ 部分写像

5

離散数学 University of Electro-Communications

復習 以下はどのような写像か?

?????

?????

6

離散数学 University of Electro-Communications

復習 以下はどのような写像か？

全射 \subseteq
写像 \subseteq 部分
写像

単射 \subseteq
写像 \subseteq 部分
写像

7

離散数学 University of Electro-Communications

復習 以下はどのような写像か？

??????

8

離散数学 University of Electro-Communications

復習 以下はどのような写像か？

全単射 \subseteq 全射または \subseteq 単射 \subseteq
写像 \subseteq 部分写像

9

離散数学 University of Electro-Communications

1. 像と原像

Def 1.
 $f: U \mapsto V; f(x)$ について
 $y = f(x) \in V$ を $x \in U$ の像, $x \in U$ を $y \in V$ の原像
 という。

原像 x

x の像 y

10

離散数学 University of Electro-Communications

1. 像と原像

像の概念を部分集合に拡張:
 $f: U \mapsto V; f(x)$ について 部分集合 $A \subseteq U, B \subseteq V$ を考える。
 V の要素のうち, A の要素の f による値になっているものを
 集めて、写像 f による集合 A の像という。 $B = f(A)$ と
 書く。

$B = f(A)$
 A の像

11

離散数学 University of Electro-Communications

1. 像と原像

数学的に定義しよう。
 内包的記述を用いると

Def 2.
 写像 $f: U \mapsto V; f(x), A \subseteq U, B \subseteq V$ について
 $B = f(A) = \{y | \text{????????????}\}$
 を A の像という。

12

離散数学 University of Electro-Communications

1. 像と原像

数学的に定義しよう。
 内包的記述を用いると
 Def 2.
 写像 $f: U \mapsto V; f(x)$, $A \subseteq U, B \subseteq V$ について

$$B = f(A) = \{y | \exists x \in A [f(x) = y]\}$$
 を A の像という。

13

離散数学 University of Electro-Communications

1. 像と原像

数学的に定義しよう。
 もうひとつの内包的記述を用いると
 Def 2.
 写像 $f: U \mapsto V; f(x)$, $A \subseteq U, B \subseteq V$ について

$$B = f(A) = \{?????\}$$
 を A の像という。

14

離散数学 University of Electro-Communications

1. 像と原像

数学的に定義しよう。
 もうひとつの内包的記述を用いると
 Def 2.
 写像 $f: U \mapsto V; f(x)$, $A \subseteq U, B \subseteq V$ について

$$B = f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$
 を A の像という。

15

離散数学 University of Electro-Communications

例題1.

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ の f の値域を像を用いて示せ。

16

離散数学 University of Electro-Communications

例題1.

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ の f の値域を像を用いて示せ。

正答

$$\text{ran}(f) = f(U)$$

17

離散数学 University of Electro-Communications

例題2.

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ について f は U から V への全射であるときの必要十分条件は

$$f(U) = \text{???}$$

18

離散数学 University of Electro-Communications

例題2.

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ について f は U から V への全射であるときの必要十分条件は

正答

$$f(U) = V$$

19

離散数学 University of Electro-Communications

例題3

$U = \{1,2,3,4,5\}, f: U \mapsto U; f(x)$ について $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5, f(4) = 5, f(5) = 1$ とする。

このとき、

- (1) f の値域を求めよ。
- (2) $\{1,2,3\}$ の像 $f[(1,2,3)]$ を求めよ。
- (3) $\{1,3,5\}$ の像 $f[(1,3,5)]$ を求めよ。

20

離散数学 University of Electro-Communications

例題3

$U = \{1,2,3,4,5\}, f: U \mapsto U; f(x)$ について $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5, f(4) = 5, f(5) = 1$ とする。

このとき、

- (1) f の値域を求めよ。 $\{1,2,5\}$
- (2) $\{1,2,3\}$ の像 $f[(1,2,3)]$ を求めよ。
- (3) $\{1,3,5\}$ の像 $f[(1,3,5)]$ を求めよ。

21

離散数学 University of Electro-Communications

例題3

$U = \{1,2,3,4,5\}, f: U \mapsto U; f(x)$ について $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5, f(4) = 5, f(5) = 1$ とする。

このとき、

- (1) f の値域を求めよ。 $\{1,2,5\}$
- (2) $\{1,2,3\}$ の像 $f[(1,2,3)]$ を求めよ。 $\{2,5\}$
- (3) $\{1,3,5\}$ の像 $f[(1,3,5)]$ を求めよ。

22

離散数学 University of Electro-Communications

例題3

$U = \{1,2,3,4,5\}, f: U \mapsto U; f(x)$ について $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5, f(4) = 5, f(5) = 1$ とする。

このとき、

- (1) f の値域を求めよ。 $\{1,2,5\}$
- (2) $\{1,2,3\}$ の像 $f[(1,2,3)]$ を求めよ。 $\{2,5\}$
- (3) $\{1,3,5\}$ の像 $f[(1,3,5)]$ を求めよ。 $\{1,2,5\} = U$ 全射

23

離散数学 University of Electro-Communications

2. 逆像

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ について U の要素のうち f による値が B に属する要素を集めてできる集合を、写像 f による B の逆像といい、 $f^{-1}(B)$ と書く。

24

離散数学 University of Electro-Communications

2. 逆像

Def 3
写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ について,
以下の集合 $f^{-1}(B)$ を写像 f による B の逆像とよぶ。

$$f^{-1}(B) = \{x | f(x) \in B\} .$$

25

離散数学 University of Electro-Communications

例題1

$U = \{1,2,3,4,5\}, f: U \mapsto U; f(x)$ について
 $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5, f(4) = 5, f(5) = 1$
とする。
このとき、
(1) $\{1\}$ の逆像 $f^{-1}[\{1\}]$ を求めよ。
(2) $\{2,5\}$ の像 $f^{-1}[\{2,5\}]$ を求めよ。

26

離散数学 University of Electro-Communications

例題1

$U = \{1,2,3,4,5\}, f: U \mapsto U; f(x)$ について
 $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5, f(4) = 5, f(5) = 1$
とする。
このとき、
(1) $\{1\}$ の逆像 $f^{-1}[\{1\}]$ を求めよ。 {5}
(2) $\{2,5\}$ の像 $f^{-1}[\{2,5\}]$ を求めよ。

27

離散数学 University of Electro-Communications

例題1

$U = \{1,2,3,4,5\}, f: U \mapsto U; f(x)$ について
 $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5, f(4) = 5, f(5) = 1$
とする。
このとき、
(1) $\{1\}$ の逆像 $f^{-1}[\{1\}]$ を求めよ。 {5}
(2) $\{2,5\}$ の像 $f^{-1}[\{2,5\}]$ を求めよ。 {1,2,3,4}

28

離散数学 University of Electro-Communications

例題2.

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ について, $A \subseteq U$ を考える。
 $A \subseteq f^{-1}[f(A)]$ を証明せよ。

29

離散数学 University of Electro-Communications

例題2.

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ について, $A \subseteq U$ を考える。
 $A \subseteq f^{-1}[f(A)]$ を証明せよ。
[証明] 定義に戻れ: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$
全称含意命題の証明では \forall をとって束縛変数(ある値) $x \in A$ と仮定して右辺を導く。
 $x \in A$ と仮定すると, $f(x) \in f(A)$. このとき逆像の定義より $f^{-1}[f(A)] = \{x | f(x) \in f(A)\}$
より $x \in f^{-1}[f(A)]$. 従って $A \subseteq f^{-1}[f(A)]$ ■

30

例題3.

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ について, $B \subseteq V$ を考える。
 $f[f^{-1}(B)] \subseteq B$ を証明せよ。

31

例題3.

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ について, $B \subseteq V$ を考える。
 $f[f^{-1}(B)] \subseteq B$ を証明せよ。

[証明] **定義に戻れ:** $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$
全称含意命題の証明では \forall をとり束縛変数(ある値) $x \in A$ と仮定して右辺を導く。

$y \in f[f^{-1}(B)]$ と仮定すると, $x \in f^{-1}(B)$
 かつ $f(x) = y$ を満たす x が存在する。このとき,
 $x \in f^{-1}(B)$ なので $f(x) \in B$ 。従って, $y \in B$ 。

$f[f^{-1}(B)] \subseteq B$ ■

32

3. 写像の合成

Def 4.

$f: U \mapsto V; f(x)$ と $g: V \mapsto W; g(x)$ に対し,
 $h: U \mapsto W; h(x) = g(f(x))$

を合成写像 $h = g \circ f$ と表す。

33

例題1

$U = \{a, b, c\}, V = \{0, 1, 2\}, W = \{p, q\}$ とする。
 このとき,

$f: U \mapsto V; f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 0$

$g: V \mapsto W; g(0) = p, g(1) = p, g(2) = q$

である。合成写像 $h = g \circ f$ の列を求めよ。

34

例題1

$U = \{a, b, c\}, V = \{0, 1, 2\}, W = \{p, q\}$ とする。
 このとき,

$f: U \mapsto V; f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 0$

$g: V \mapsto W; g(0) = p, g(1) = p, g(2) = q$

である。合成写像 $h = g \circ f$ の列を求めよ。

正答:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(1) = p$$

35

例題1

$U = \{a, b, c\}, V = \{0, 1, 2\}, W = \{p, q\}$ とする。
 このとき,

$f: U \mapsto V; f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 0$

$g: V \mapsto W; g(0) = p, g(1) = p, g(2) = q$

である。合成写像 $h = g \circ f$ の列を求めよ。

正答:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(1) = p$$

$$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(2) = q$$

36

離散数学 University of Electro-Communications

例題1

$U = \{a, b, c\}, V = \{0, 1, 2\}, W = \{p, q\}$ とする。
 このとき、
 $f: U \mapsto V; f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 0$
 $g: V \mapsto W; g(0) = p, g(1) = p, g(2) = q$
 である。合成写像 $h = g \circ f$ の列を求めよ。
正答:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(1) = p$$

$$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(2) = q$$

$$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(0) = p$$

37

離散数学 University of Electro-Communications

例題2

$$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; x \mapsto x + 1,$$

$$g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x - 3,$$

のとき、合成写像 $g \circ f$ を求めよ。

38

離散数学 University of Electro-Communications

例題2

$$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; x \mapsto x + 1,$$

$$g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x - 3,$$

のとき、合成写像 $g \circ f$ を求めよ。
正答

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1)$$

$$= 2(x + 1) - 3 = 2x - 1$$

従って

$$g \circ f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x - 1 .$$

39

離散数学 University of Electro-Communications

例題3

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x + 1,$$

$$g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x - 3,$$

のとき、合成写像 $f \circ g$ を求めよ。

40

離散数学 University of Electro-Communications

例題3

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x + 1,$$

$$g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x - 3,$$

のとき、合成写像 $f \circ g$ を求めよ。
正答

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x - 3)$$

$$= (2x - 3) + 1 = 2x - 2$$

従って

$$f \circ g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x - 2 .$$

$g \circ f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x - 1$ とは異なる

41

離散数学 University of Electro-Communications

例題3の補題

$$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; x \mapsto x + 1,$$

$$g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; x \mapsto 2x - 3,$$

のとき、合成写像 $f \circ g$ を求めよ。

42

離散数学 University of Electro-Communications

例題3の補題

$$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; x \mapsto x + 1,$$

$$g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; x \mapsto 2x - 3,$$

のとき、合成写像 $f \circ g$ を求めよ。

正答

g は写像ではないので解なし

$x = 1$ のとき、 $g(x) = -1$ で \mathbb{N} でない。

43

離散数学 University of Electro-Communications

例題4

$$f: U \mapsto V, g: V \mapsto W, h: W \mapsto X,$$

のとき、 $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ を証明せよ。

44

離散数学 University of Electro-Communications

例題4

$$f: U \mapsto V, g: V \mapsto W, h: W \mapsto X,$$

のとき、 $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ を証明せよ。

[証明]

全称記号 $\forall x \in U$ が隠れている。全称記号についての証明。 \forall をとって束縛変数として扱う。

$x \in U$ とする。

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) =$$

$$h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x)$$

45

離散数学 University of Electro-Communications

4. 逆写像

Def 5

$f: U \mapsto V$ が全単射のとき、
 $f^{-1}: V \mapsto U$ を f の逆写像と呼ぶ。

$f: U \mapsto V$ $f^{-1}: V \mapsto U$

46

離散数学 University of Electro-Communications

例題1

$$U = \{a, b, c\}, V = \{0, 1, 2\}$$

$f: U \mapsto V; a \mapsto 2, b \mapsto 0, c \mapsto 1$ のとき、逆写像を求めよ。

47

離散数学 University of Electro-Communications

例題1

$$U = \{a, b, c\}, V = \{0, 1, 2\}$$

$f: U \mapsto V; a \mapsto 2, b \mapsto 0, c \mapsto 1$ のとき、逆写像を求めよ。

[回答]

$$f^{-1}: V \mapsto U; 0 \mapsto b, 1 \mapsto c, 2 \mapsto a$$

48

例題2

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+; f(x) = \exp(x)$
の逆写像を求めよ。

49

例題2

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+; f(x) = \exp(x)$
の逆写像を求めよ。

[回答]

$$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}; f^{-1}(x) = \ln(x)$$

50

例題3

恒等写像 $\text{id}_U: U \mapsto U; \text{id}_U(x) = x$ の逆写像 id_U^{-1}
を求めよ。

51

例題3

恒等写像 $\text{id}_U: U \mapsto U; \text{id}_U(x) = x$ の逆写像 id_U^{-1}
を求めよ。

[回答]

$$\text{id}_U^{-1}(x) = \text{id}_U(x)$$

52

例題4

$f: U \mapsto V$ が全単射のとき,
 $f^{-1} \circ f$ はどのような写像か?

53

例題4

$f: U \mapsto V$ が全単射のとき,
 $f^{-1} \circ f$ はどのような写像か?

[回答]

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_U(x)$$

54

まとめ

- ① 像と原像
- ② 逆像
- ③ 写像の合成
- ④ 逆写像

演習問題

56

問題1

$U = \{a, b, c, d\}, V = \{x, y, z\}$ とする。

$f: U \mapsto V$ と $g: V \mapsto U$ を $f(a) = y, f(b) = x, f(c) = z, f(d) = y, g(x) = d, g(y) = c, g(z) = b$ とする。

- (1) 合成写像 $g \circ f$ の像を求めよ。
- (2) U の部分集合 $A = \{a, b, c\}$ の $g \circ f$ による逆像 $f^{-1}(A)$ を求めよ。
- (3) $g \circ f$ と $f \circ g$ はそれぞれ全射であるか？また単射であるか？さらに 全単射であるものについてはその逆写像を求めよ。

57

問題2

$f: U \mapsto V, A \subset U, B \subset U$ のとき,
 $A \subseteq f^{-1}[f(A)]$

を証明せよ。また、等号の成り立つ条件を述べよ。

58

問題3

$f: U \mapsto V, A \subset U, B \subset U$ のとき,
 $f[f^{-1}(B)] \subseteq B$

を証明せよ。また、等号の成り立つ条件を述べよ。

59

問題4

$U = \{a\}, V = \{a, b\}$

$f: U \mapsto V$ と $g: V \mapsto U$ を $f(a) = a, g(a) = a, g(b) = a$ とする。

このとき、 $g \circ f$ と $f \circ g$ はそれぞれ恒等写像となるか？

60

問題5

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; f(x) = x^3 - x$ とする。以下を求めよ。

- (1) $f(\mathbb{R})$
- (2) $f^{-1}(0)$
- (3) $f^{-1}(6)$

61

問題6

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; f(x)$ とする。また、 $a, b \in \mathbb{R}$ に対して
 $f(a - b) = f(a) - f(b)$ を満たす。

- (1) $f(0) = 0$ であることを証明せよ。
- (2) $f(-a) = -f(a)$ であることを証明せよ。
- (3) f が単射であることと $f^{-1}(0) = \{0\}$ であることが同値であることを証明せよ。

62