離散数学第 12 回演習問題解答例 (8/1 修正)

2016 年 7 月 14 日

1

$U = \{a, b, c, d\}$, $V = \{x, y, z\}$ とする．$f : U \longmapsto V$ と $g : V \longmapsto U$ を $f(a) = y, f(b) = x, f(c) = z, f(d) = y, g(x) = d, g(y) = c, g(z) = b$ とする．

1. 合成写像 $g \circ f$ を求めよ．

   解答

   $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(y) = c$

   $(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(x) = d$

   $(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(z) = b$

2. U の部分集合 $A = \{a, b, c\}$ の $g \circ f$ による逆像 $f^{-1}(A)$ を求めよ．

   解答

   合成写像 $(g \circ f)(a), (g \circ f)(b), (g \circ f)(c)$ の逆を求めればよい．

   $f^{-1}(c) = z$

   $f^{-1}(b) = x$

   $f^{-1}(a) = y$

   したがって，$f^{-1}(A) = \{x, y, z\}$

3. $g \circ f$ と $f \circ g$ はそれぞれ全射であるか?また，単射であるか?さらに，全単射であるものについてはその逆写像を求めよ．

   解答

   $g \circ f$ について，(1) より，

   $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(y) = c$

   $(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(x) = d$

   $(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(z) = b$

   $(g \circ f)(d) = g(f(d)) = g(y) = c$

   $f \circ g$ はそれぞれ,

   $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(c) = z$

$(f \circ g)(z) = f(g(z)) = f(b) = x$
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(d) = y$
したがって，$g \circ f$ は,U の全ての要素に矢印が当たっているので，全射である．$f \circ g$ は V に 1 対 1 に対応し，全ての要素に矢印が当たっているので，全単射である．
逆写像は,
$g^{-1}(y) = f^{-1}(y) = c$
$g^{-1}(x) = f^{-1}(x) = d$
$g^{-1}(z) = f^{-1}(z) = b$

2

$f : U \longmapsto V, A \subset U, B \subset U$ のとき，$A \subseteq f^{-1}[f(A)]$ を証明せよ．また，等号の成り立つ条件を求めよ．

解答

$x \in A$ と仮定すると，$f(x) \in f(A)$ このとき，逆像の定義より，$f^{-1}[f(A)] = \{x | f(x) \in f(A)\}$ であるから，$x \in f^{-1}[f(A)]$

したがって，$A \subseteq f^{-1}[f(A)]$

また，等号成立条件は $A \subseteq f(A) \wedge f(A) \subseteq A$ である．□

3

$f : U \longmapsto V, A \subset U, B \subset U$ のとき，$f^{-1}[f(B)] \subseteq B$ を証明せよ．また，等号の成り立つ条件を求めよ．

解答

$y \in f[f^{-1}(B)]$ と仮定すると，$x \in f^{-1}(B)$ かつ $f(x) = y$ をみたす x が存在する．

このとき，$x \in f^{-1}(B)$ であるから，$f(x) \in B$

したがって，$f^{-1}[f(B)] \subseteq B$

また，等号成立条件は $B \subseteq f(B) \wedge f(B) \subseteq B$ である．□

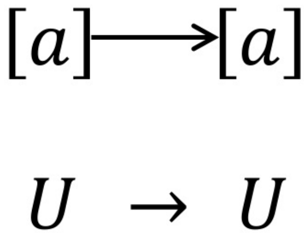
4

$$U = \{a\},\ V = \{a, b\}$$

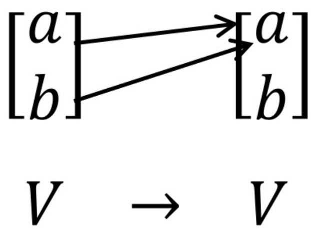
$f : U \to V$，$g : V \to U$ を $f(a) = a$，$g(a) = a$，$g(b) = a$ とする．このとき，$g \circ f$ と $f \circ g$ はそれぞれ恒等写像になり得るか.

解答

$g \circ f : U \to V \to U$ すなわち $U \to U$ である．このとき



これより，$g \circ f$ は恒等写像であることは自明である．
一方で，$f \circ g : V \to U \to V$ すなわち $V \to V$ である．このとき



これより，$f \circ g$ は恒等写像ではない．

5

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = x^3 - x$ とする．以下を求めよ．

(1) $f(\mathbb{R})$
解答

$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

(2) $f^{-1}(0)$
解答

$$f^{-1}(0) = \{-1, 0, 1\}$$

(3) $f^{-1}(6)$
解答

$$f^{-1}(6) = \{2\}$$

6

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}; f(x)$ とする．また，$a,b\in\mathbb{R}$ に対して，$f(a-b)=f(a)-f(b)$ を満たす．このとき以下の設問を証明せよ．

(1) $f(0)=0$ であることを証明せよ．

解答

$$f(0)=f(0-0)=f(0)-f(0)=0 \ \square$$

(2) $f(-a)=-f(a)$ であることを証明せよ．

解答

$$f(-a)=f(0-a)=f(0)-f(a)=-f(a) \ \square$$

(3) f が単射であることと，$f^{-1}(0)=\{0\}$ であることが同値であることを証明せよ．

解答

f は単射であるとする．(1) より，$0\in f^{-1}(0)$ であるから，$\{0\}\subset f^{-1}(0)$ である．$a\in\mathbb{R}$ を $f(a)=0$ を満たすものとすると，$f(a)=0=f(0)$ で，f が単射であることにより $a=0$ である．よって，$f^{-1}(0)=\{0\}$ である．$f^{-1}(0)=\{0\}$ とする．$a,b\in\mathbb{R}$ について，$f(a)=f(b)$ とする．このとき，$f(a-b)=f(a)-f(b)=0$ である．したがって，$a-b\in f^{-1}(0)=\{0\}$ となり，$a-b=0$，すなわち，$a=b$．よって f は単射である．$\square$