離散数学第 12 回演習問題類題解答例 (8/2 修正)

2016 年 7 月 14 日

1

f:$X \to Y$ と g:$Y \to Z$ が関数とすると，以下が成り立つことを証明せよ．

(1) f と g が 1 対 1 の関数ならば，$g \circ f$ も 1 対 1 の関数である．

解答

$x, y \in X$ に対して，$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ とする．このとき，$g(f(x)) = g(f(y))$ となって，g は 1 対 1 の関数であるため，$f(x) = f(y)$．さらに，f も 1 対 1 の関数であるから，$x = y$．すなわち，$g \circ f$ は 1 対 1 の関数である．□

(2) f と g が上への関数ならば，$g \circ f$ も上への関数である．

解答

$x \in Z$ とする．g は上への関数であるから適当な $y \in Y$ が存在して，$x = g(y)$ となる．また f も上への関数だから，適当な $z \in X$ が存在して，$y = f(z)$ となる．このとき $x = g(y) = g(f(z)) = (g \circ f)(z)$ であるから，$g \circ f$ は上への関数である．□

(3) f，g が 1 対 1 対応ならば，$g \circ f$ も 1 対 1 対応である．

解答

設問 (1)，(2) を用いて解答が得られる．□

(4) 任意の関数 $f : X \to Y$ に対して，集合 Z と $f = h \circ g$ となる 1 対 1 の関数となる h:$Z \hookrightarrow Y$，および，上への関数 g:$X \to Z$ が存在する．

解答

$Z = f(x)$ とする．写像 $g : X \to Z$ と $h : Z \to Y$ を次のように定義する．

$$g(x) = f(x) \ (x \in Z)$$
$$h(z) = z \ (z \in Z)$$

明らかに，g は上への関数で，h は 1 対 1 の関数になっており，$f = h \circ g$ を満たしている．□

2

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とする．次の $f{:}A \to A$ は写像かどうか判断し，写像ならば，集合 $P = \{2, 3\}$ の像，集合 $Q = \{4\}$ の原像，集合 $R = \{1, 2\}$ の原像を求めよ．

(1) {(3,1), (4,2), (1,1), (2,3), (5,3)}
解答

$$\begin{gathered}\text{写像である．}\\ P = \{2,3\} \text{ の像: } \{3,1\}\\ Q = \{4\} \text{ の原像: } \phi\\ R = \{1,2\} \text{ の原像: } \{1,3,4\}\end{gathered}$$

(2) {(2,1), (3,5), (1,4), (2,3), (5,2), (4,2)}
解答

$$\text{写像ではない．}$$

(3) {(4,2), (2,3), (5,4), (1,5), (4,2), (3,4)}
解答

$$\begin{gathered}\text{写像である．}\\ P = \{2,3\} \text{ の像: } \{3,4\}\\ Q = \{4\} \text{ の原像: } \{3,5\}\\ R = \{1,2\} \text{ の原像: } \{4\}\end{gathered}$$

3

任意の集合 A，B，任意の写像 $f{:}A \to B$，任意の $X, X' \subseteq A$ に対して，

$$X \subseteq X' \text{ ならば } f(X) \subseteq f(X')$$

であることを証明せよ．

解答
$X \subseteq X$ であると仮定する．また，$b \in f(X)$ であると仮定する．
このとき，ある $a \in X$ が存在して，$b = f(a)$ となる．(1)
一方で，$b = f(a)$ を満たす $a \in X$ を考える．(2)
(1)，(2) より，$a \in X'$.
したがって，(2) で考えた a は $b = f(a)$ と $a \in X'$ を満たす．
したがって，$b \in f(X')$ である．
ゆえに，$f(X) \subseteq f(X')$ である．$\square$

4

$X = \{1,2,3,4,5\}$，$Y = \{a,b,c\}$ とし，写像 $f : X \to Y$ を，$f(1) = a$，$f(2) = b$，$f(3) = b$，$f(4) = a$，$f(5) = b$ で定める．このとき，以下のものを求めよ．

(1) $f^{-1}(a)$
解答

$$f^{-1}(a) = \{1,4\}$$

(2) $f^{-1}(c)$
解答

$$f^{-1}(c) = \phi$$

(3) $f^{-1}(\{a,c\})$
解答

$$f^{-1}(\{a,c\}) = \{1,4\}$$

5

$f : X \to Y$，$g : Y \to Z$ を写像とする．この時，以下の設問について証明せよ．

(1) $g \circ f$ が全射で g が単射ならば f が全射であることを証明せよ．
解答
$y \in Y$ とする．$g(y) \in Z$ に対して，$g \circ f$ が全射なので，ある $x \in X$ があって，$g(y) = g \circ f(x) = g(f(x))$ である．g が単射なので $y = f(x)$ となる．よって，f は全射である．$\square$

(2) $g \circ f$ が単射で f が全射ならば g が単射であることを証明せよ．

解答

$y, y' \in Y$ について，$g(y) = g(y')$ とする．f は全射なので，ある $x, x' \in X$ が存在して $y = f(x)$, $y' = f(x')$ となる．このとき, $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = g(y') = g(f(x')) = g \circ f(x')$ である．$g \circ f$ は単射なので，$x = x'$ となる．よって，$y = f(x) = f(x') = y'$ となり g は単射である．$\square$