3.命題論理

植野真臣

スケジュール

4月14日：第1回：命題と証明
4月21日：第2回：集合の基礎、全称記号、存在記号
4月28日：第3回：命題論理
5月12日：第4回：述語論理
5月19日：第5回：述語と集合
5月26日：第6回：直積と冪集合
6月2日：第7回：様々な証明法 (1)
6月9日：第8回：様々な証明法 (2)
6月16日：第9回：様々な証明法 （再帰的定義と数学的帰納法）
6月23日：第10回：中間試験
6月30日：第11回：写像（関数） (1)
7月7日：第12回：写像 (関数) (2)
7月14日：第13回：写像と関係：二項関係、関係行列、グラフによる表現
7月21日：第14回：同値関係
7月28日：第15回：順序関係：半順序集合、ハッセ図、全順序集合、上界と下界
8月4日：期末試験（補講があればずれていきます。）

1. 本日の目標

1. 命題論理とは何かを理解する
2. 命題演算ができる
3. 命題演算を用いて証明ができる
4. 含意，必要条件，十分条件を理解する
5. 逆，裏，対偶を理解する

2. 命題(Proposition)（再掲　一回目授業）

Def
命題(Proposition)とは、真か偽か判断できる記述

- 調布市は東京ではない
- 和田アキ子は男である
- ビートルズはすごい！！
- このレストランのステーキはおいしい！！
- 犬は動物である
- $x^2 - 1 = 0$

3. 記法

- 命題をp, q, r, s などの**命題記号**であらわす
  $p : f(x) = x^2 + x - 2$とすると$f(1) = 0$
  $q : \forall a, \forall b \in \mathbb{Z}, (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  $r : \exists a, \exists b, \exists c \in \mathbb{N}, s.t. a^3 + b^3 = c^3$

注） $s.t.$ ～ ： such that ～ 、～となるような
- 命題の真理値(truth value)は真(T)か偽(F)である。
- 命題を取り扱う論理を命題論理(propositional logic)と呼ぶ。

4. 論理積 ∧

命題p, qに対して，pとqを「かつ」という言葉で結び付けて「 pかつq 」という文を作ると，これも命題になる。この命題をpとqの論理積，連言（れんげん）といい，$p \land q$と書く。

論理積 ∧の真理値表

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

5. 論理和 ∨

命題p,qに対して，pとqを「または」という言葉で結び付けて「 pまたはq 」という文を作ると，これも命題になる。この命題をpとqの論理和，選言（せんげん）といい，$p \vee q$と書く。

論理積∨の真理値表

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

6. 否定 ¬

命題pに対して，「pでない」という文を作ると，これも命題になる。この命題をpの否定といい，$\neg p$と書く。

また，¬と∧，∨が同時に現れる場合には「 ¬は∧，∨よりも優先度が高い。

否定¬の真理値表

p	$\neg p$
T	F
F	T

7. 例

命題p 「私は車を運転する」

命題q 「私は免許を持っている」

↓

$\neg p$　命題「私は車を運転しない」

$p \wedge q$　命題「私は車を運転するし，免許も持っている」

$p \vee q$　命題「私は車を運転するか，または，免許を持っている」

$\neg p \vee q$　命題「私は車を運転しないか，または，免許を持っている」

8. 恒真命題と矛盾命題

命題$p \vee \neg p$の真理値表は以下のようになる。

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

命題pの値が何であっても命題$p \vee \neg p$はTになる。このように命題変数を含む命題の真理値が，含んでいる命題変数の真理値に関係なく常にTとなるとき，その命題を**恒真命題**(こうしん)または**トートロジー**(tautology)と呼ぶ。逆に，$p \wedge \neg p$のように命題変数を含む命題の真理値が，含んでいる命題変数の真理値に関係なく常にFとなるとき，その命題を**矛盾命題**と呼ぶ。

問　矛盾命題の例を挙げよ

問　矛盾命題の例を挙げよ

$$p \wedge \neg p$$

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	F
F	T	F

9. 論理同値

$\neg p \wedge q$と$\neg(p \vee \neg q)$の真理値表を作成せよ。

9. 論理同値

$\neg p \wedge q$と$\neg(p \vee \neg q)$の真理値表を作成せよ。

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	F

p	q	$\neg q$	$\neg(p \vee \neg q)$
T	T	F	F
T	F	T	F
F	T	F	T
F	F	T	F

二つの真理値表が同じであることがわかる。このようなとき，$\neg p \wedge q$と$\neg(p \vee \neg q)$は**論理同値**であるといい，

$\neg p \wedge q \equiv \neg(p \vee \neg q)$と書く。

論理同値の意味

命題が論理同値であるということは，それらは「命題として同じである」，言い換えれば「同じ内容を主張している」ということを意味する。

例

命題p「私は車を運転する」 命題q「私は免許を持っている」

↓

$\neg p \wedge q$ 「私は車を運転しない，かつ，免許を持っている」

$\neg(p \vee \neg q)$ 「『私は車を運転する，または，免許を持っていない』ではない」

これらは同じ内容を主張している。

10. 命題代数の法則（よく知られた同値命題）

分配律

$$p\lor(q\land r)\equiv(p\lor q)\land(p\lor r)$$
$$p\land(q\lor r)\equiv(p\land q)\lor(p\land r)$$

ド・モルガンの法則

$$\neg(p\lor q)\ \equiv\neg p\land\neg q$$
$$\neg(p\land q)\ \equiv\neg p\lor\neg q$$

11. 命題代数の双対性

命題代数の法則では，その法則に含まれている$\lor$と$\land$を交換し，真Tと偽Fを交換した法則は、やはり成り立つという性質がある。これを双対性（duality）と呼ぶ。また，元の式に対して変形された式を双対（dual)と呼ぶ。

例

$$p\lor(q\land r)\equiv(p\lor q)\land(p\lor r)$$

の双対は

$$p\land(q\lor r)\equiv(p\land q)\lor(p\land r)$$

になる。これは分配律。

$$\neg(p\lor q)\ \equiv\neg p\land\neg q$$

の双対は

$$\neg(p\land q)\ \equiv\neg p\lor\neg q$$

になる。これはド・モルガンの法則。

12. 含意（がんい）

「pならばqである」という文を一般に**条件文**という。このとき，命題pを**仮定**，命題qを**結論**と呼び，「$p\rightarrow q$」と書く。
論理演算子→を**含意**と呼ぶ。

「含意」の真理値表

「$p\rightarrow q$」:
「仮定p が真のときには結論q も真でなければいけない」

含意の真理値表

「$p\rightarrow q$」:
「仮定p が真のときには結論q も真でなければいけない」
「仮定p が偽のときには結論q は真でも偽でもかまわない」
と解釈する。

例

命題p「私は車を運転する」ならば
命題q「私は免許を持っている」
というルールがある。
以下はルールは守られているのか？

例

命題p「私は車を運転する」ならば
命題q「私は免許を持っている」
というルールがある。
以下はルールは守られているのか？

- 「私は車を運転するし、 免許を持っている」

例

命題p「私は車を運転する」ならば
命題q「私は免許を持っている」
というルールがある。
以下はルールは守られているのか？

- 「私は車を運転するし、 免許を持っている」 ◎
- 「私は車を運転するし、 免許を持っていない」

例

命題p「私は車を運転する」ならば
命題q「私は免許を持っている」
というルールがある。
以下はルールは守られているのか？

- 「私は車を運転するし、 免許を持っている」 ◎
- 「私は車を運転するし、 免許を持っていない」 ×
- 「私は車を運転しないが、 免許を持っている」

例

命題p「私は車を運転する」ならば
命題q「私は免許を持っている」
というルールがある。
以下はルールは守られているのか？

- 「私は車を運転するし、 免許を持っている」 ◎
- 「私は車を運転するし、 免許を持っていない」 ×
- 「私は車を運転しないが、 免許を持っている」 ◎
- 「私は車を運転しないし、 免許を持っていない」

例

命題p「私は車を運転する」ならば
命題q「私は免許を持っている」
というルールがある。
以下はルールは守られているのか？

- 「私は車を運転するし、 免許を持っている」 ◎
- 「私は車を運転するし、 免許を持っていない」 ×
- 「私は車を運転しないが、 免許を持っている」 ◎
- 「私は車を運転しないし、 免許を持っていない」◎

必要条件と十分条件

命題「$p \to q$」が真のとき,
pをqの「十分条件」と呼び, q をpの「必要条件」と呼ぶ。

「車を運転する」ことは「免許を持っている」ことの十分条件である。 車を運転しているのならば、免許は持っているし、運転しなくても持っている場合がある。「免許を持っている」ことは「車を運転する」の必要条件である。車を運転するためには、絶対に免許を持っていないといけない。

$p \to q$の真理値表を作成せよ

p	q	$p \to q$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

$p \to q$の真理値表を作成せよ

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	
F	T	
F	F	

$p \to q$の真理値表を作成せよ

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	
F	F	

$p \to q$の真理値表を作成せよ

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$\neg p \lor q$の真理値表を作成せよ

p	q	$\neg p \lor q$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

$\neg p \vee q$の真理値表を作成せよ

p	q	$\neg p \vee q$
T	T	T
T	F	
F	T	
F	F	

$\neg p \vee q$の真理値表を作成せよ

p	q	$\neg p \vee q$
T	T	T
T	F	F
F	T	
F	F	

$\neg p \vee q$の真理値表を作成せよ

p	q	$\neg p \vee q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	

$\neg p \vee q$の真理値表を作成せよ

p	q	$\neg p \vee q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$p \to q$, $\neg p \vee q$を比べてみると

$p \to q$

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$\neg p \vee q$

p	q	$\neg p \vee q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$p \to q$, $\neg p \vee q$を比べてみると

$p \to q$

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$\neg p \vee q$

p	q	$\neg p \vee q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$p \to q$と$\neg p \vee q$ は論理同値。即ち，$p \to q \equiv \neg p \vee q$
「pならばq」とは，「p でないか，（p であるときには）qである」であるという意味

含意についての重要な知見

$$p \to q \equiv \neg p \vee q$$

pが偽か　またはqが真である　！！

例題　1 (Waison 1972)

ある工場では、表に文字、裏に数字を印刷したラベルを,
「片方が母音ならば, もう一面は偶数」
という規則に従って製造している。つぎのように4枚のカードの一つの面が見えているとき, 製造規則が守られているのかどうかを調べるためには, 最低限どのカードを裏返さなければならないか？

E	K	4	7

回答

p「表が母音」 q「裏は偶数」

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

回答

p「表が母音」 q「裏は偶数」 → 違反かどうかはpが真のときとqが偽の時に限る！！

p	q	$p \to q$	
T	T	T	
T	F	F	違反が起きるのはここのみ
F	T	T	
F	F	T	

回答

p「表が母音」 q「裏は偶数」

p	q	$p \to q$	
T	T	T	
T	F	F	違反が起きるのはここのみ
F	T	T	
F	F	T	

正答は　E と7

E	K	4	7

したがって
p「表が母音」 q「裏は偶数」
Pが真のときと qが偽の時を調べればよい。

13．同値

pが真のとき，qも真であり，pが偽のとき，qも偽であるとき，「pとqは同値である」といい，$p \leftrightarrow q$と書く。

例

まおみさんの家では，
「学校のテストで満点をとったときのみ，おやつにケーキが出る」という約束があります。
以下は約束は守られたのでしょうか？

例

まおみさんの家では，
「学校のテストで満点をとったときのみ，おやつにケーキが出る」という約束があります。
以下の状況は約束は守られたのでしょうか？

- 「学校のテストで満点をとったら，おやつにケーキが出た」

例

まおみさんの家では，
「学校のテストで満点をとったときのみ，おやつにケーキが出る」という約束があります。
以下の状況は約束は守られたのでしょうか？

- 「学校のテストで満点をとったら，おやつにケーキが出た」 約束は守られた
- 「学校のテストで満点をとったのに，おやつにケーキは出なかった」

例

まおみさんの家では，
「学校のテストで満点をとったときのみ，おやつにケーキが出る」という約束があります。
以下の状況は約束は守られたのでしょうか？

- 「学校のテストで満点をとったら，おやつにケーキが出た」 約束は守られた
- 「学校のテストで満点をとったのに，おやつにケーキは出なかった」 約束は守られなかった
- 「学校のテストで満点をとらなかったのに，おやつにケーキが出た」

例

まおみさんの家では，
「学校のテストで満点をとったときのみ，おやつにケーキが出る」という約束があります。
以下の状況は約束は守られたのでしょうか？

- 「学校のテストで満点をとったら，おやつにケーキが出た」 約束は守られた
- 「学校のテストで満点をとったのに，おやつにケーキは出なかった」 約束は守られなかった
- 「学校のテストで満点をとらなかったのに，おやつにケーキが出た」 約束は守られなかった
- 「学校のテストで満点をとらなかったので，おやつにケーキが出なかった」

例

まおみさんの家では，
「学校のテストで満点をとったときのみ，おやつにケーキが出る」という約束があります。
以下の状況は約束は守られたのでしょうか？

- 「学校のテストで満点をとったら，おやつにケーキが出た」
  約束は守られた
- 「学校のテストで満点をとったのに，おやつにケーキは出なかった」　約束は守られなかった
- 「学校のテストで満点をとらなかったのに，おやつにケーキが出た」　約束は守られなかった
- 「学校のテストで満点をとらなかったので，おやつにケーキが出なかった」　約束は守られた

$p \leftrightarrow q$の真理値表を作成せよ

$p \leftrightarrow q$の真理値表を作成せよ

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

$p \leftrightarrow q$の真理値表を作成せよ

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	
F	T	
F	F	

$p \leftrightarrow q$の真理値表を作成せよ

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	
F	F	

$p \leftrightarrow q$の真理値表を作成せよ

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	

$p \leftrightarrow q$の真理値表を作成せよ

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

$(p \to q) \wedge (q \to p)$の真理値表を作成せよ

p	q	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

$(p \to q) \wedge (q \to p)$の真理値表を作成せよ

p	q	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
T	T	T
T	F	
F	T	
F	F	

$(p \to q) \wedge (q \to p)$の真理値表を作成せよ

p	q	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
T	T	T
T	F	F
F	T	
F	F	

$(p \to q) \wedge (q \to p)$の真理値表を作成せよ

p	q	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	

$(p \to q) \wedge (q \to p)$の真理値表を作成せよ

p	q	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

p	q	$(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

同値$p \leftrightarrow q$とは，「$p \mapsto q$」かつ「$q \mapsto p$」のこと

必要十分条件

「pとqは同値」($p \leftrightarrow q$)のとき，pをqの(qをpの)「必要十分条件」と呼ぶ。

『まおみさんの家では，

「学校のテストで満点をとったときのみ，おやつにケーキが出る」という約束があります。』

$\rightarrow$

「学校のテストで満点を取ること」が「おやつにケーキが出ること」の必要十分条件

「おやつにケーキが出ること」が「学校のテストで満点を取ること」の必要十分条件

次の表現はすべて同じ意味である

- 「学校のテストで満点を取ること」が「おやつにケーキが出ること」の必要十分条件である。
- 「学校のテストで満点を取ること」と「おやつにケーキが出ること」は同値である。
- 学校のテストで満点を取るときのみ，おやつにケーキが出る。
- 学校のテストで満点を取る↔おやつにケーキが出る
- 「学校のテストで満点を取ること」と「おやつにケーキが出ること」は同等である （集合：2章参照）
- 学校のテストで満点を取る⇔おやつにケーキが出る（集合：2章参照）

「含意」と集合演算

問： 集合演算（2章参照）

$A \subseteq \mathrm{B}$

の定義を述べよ？

「含意」と集合演算

再掲（2章）

Def $A \subseteq \mathrm{B} \Leftrightarrow \forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$

AであればBである ⇔ AはBに含まれる

「含意→」は集合演算では ⊆ と同値

命題論理では $\neg p \lor q$

14. 逆

$p \rightarrow q$に対し，仮定と結論を入れ替えて得られる条件文$q \rightarrow p$を$p \rightarrow q$の**逆**と呼ぶ。

15. 裏

$p \to q$の仮定と結論の両方を否定して得られる条件文$\neg p \to \neg q$を$p \to q$の**裏**と呼ぶ。

16. 対偶

$p \to q$の仮定と結論を入れ替えて、さらに仮定と結論の両方を否定して得られる条件文$\neg q \to \neg p$を$p \to q$の**対偶**と呼ぶ。

$\neg q \to \neg p$の真理値表を作成せよ。

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \to \neg p$
T	T			
T	F			
F	T			
F	F			

$\neg q \to \neg p$の真理値表を作成せよ。

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \to \neg p$
T	T	F	F	T
T	F			
F	T			
F	F			

$\neg q \to \neg p$の真理値表を作成せよ。

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \to \neg p$
T	T	F	F	T
T	F	T	F	F
F	T			
F	F			

$\neg q \to \neg p$の真理値表を作成せよ。

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \to \neg p$
T	T	F	F	T
T	F	T	F	F
F	T	F	T	T
F	F			

$\neg q \to \neg p$の真理値表を作成せよ。

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \to \neg p$
T	T	F	F	T
T	F	T	F	F
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T

$p \to q$と対偶$\neg q \to \neg p$は論理同値

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \to \neg p$
T	T	F	F	T
T	F	T	F	F
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T

Th 1　命題$p \to q$とその対偶$\neg q \to \neg p$は論理同値を論理代数により証明せよ。

Th 1　命題$p \to q$とその対偶$\neg q \to \neg p$は論理同値

証明

$p \to q \equiv \neg p \vee q$　より

$$\neg q \to \neg p \equiv \neg\neg q \vee \neg p$$
$$\neg\neg q \vee \neg p \equiv q \vee \neg p$$
$$q \vee \neg p \equiv \neg p \vee q$$
$$\neg p \vee q \equiv p \to q$$

従って　$\neg q \to \neg p \equiv p \to q$

命題$p \to q$とその対偶$\neg q \to \neg p$は論理同値　■

命題を証明することとその命題の対偶を証明することは同じ

含意の対偶の例

まおみさんが満点を取るとおやつにケーキがでる。

まおみさんが満点を取る　→　おやつにケーキがでる。

含意の対偶の例

まおみさんが満点を取るとおやつにケーキがでる。

まおみさんが満点を取る　→　おやつにケーキがでる。

対偶

おやつにケーキが出ていない　→　まおみさんは満点をとっていない

変な含意の対偶の例

命題
「まおみさんは　怒られないと怠ける」

まおみさんは　怒られない　→　怠ける

変な含意の対偶

命題
「まおみさんは　怒られないと怠ける」

まおみさんは　怒られない　→　怠ける

対偶
まおみさんは　怠けない　→　怒られる

なんで？

まおみさんは　怒られない　→　怠ける
は　含意命題ではない。

「怠ける」は 「怒られない」の必要条件になっていない
正解
まおみさんは　怒られない　→　怠けていない

注意

～ならば～
→
AならばB
BがAの必要条件になっているかどうかをチェック。

17. まとめ

1. 命題論理とは何かを理解する
2. 命題演算ができる
3. 命題演算を用いて証明ができる
4. 含意，必要条件，十分条件を理解する
5. 逆，裏，対偶を理解する

演習問題

問題 1

「アルコールを飲んでいるなら20歳以上でなければならない」という法律がある. 次のように年齢と飲み物だけが分かっている4人の人がいるとき, この法律が守られているかどうかを確かめるためには, 誰を調べればよいか.

ビール	コーラ	25歳	17歳

問題 2

次の各命題の真偽を答えてください.

(1) $1+1=1 \rightarrow 2+3=1$
(2) $1+2=3 \rightarrow 1+3=4$
(3) $1>2 \rightarrow 4>1$
(4) $1+2=3 \rightarrow 2+3=1$

問題3 次の命題の真理値表を求めよ。また, 恒真命題, 矛盾命題のものを挙げよ。

(1) $p \vee \neg q$
(2) $\neg(\neg p \wedge q)$
(3) $p \wedge \neg(p \vee q)$
(4) $p \vee (p \wedge q)$
(5) $p \wedge (p \vee q)$
(6) $\neg(p \vee q)$
(7) $\neg(p \rightarrow q)$
(8) $\neg p \rightarrow q$

問題4. 以下を証明せよ。

(1) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
(2) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
(3) $\neg p \wedge q \equiv \neg(p \vee \neg q)$
(4) $\neg q \rightarrow p \equiv \neg p \rightarrow q$
(5) $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$
(6) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r \equiv (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$